BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TOÁN 7

TẬP HAI

$A = 3x^2y + 2xy^2$





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

PHAN ĐỨC CHÍNH (Tổng chủ biên)
TÔN THÂN (Chủ biên)
TRẦN ĐÌNH CHÂU - TRẦN PHƯƠNG DUNG - TRẦN KIỀU

TOÁN 7

TẬP HAI

(Tái bản lần thứ mười)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS. TS VŨ VĂN HÙNG
Biên tập lần đầu : PHẠM BẢO KHUÊ - NGUYỄN MINH LÝ
Biên tập tái bản : ĐẶNG MINH THU
Biên tập kĩ thuật : NGUYỄN PHƯƠNG YÊN - TRẦN THANH HẰNG
Trình bày bìa : BÙI QUANG TUẤN
Minh hoạ : NGUYỄN TIẾN DŨNG
Sửa bản in : VƯƠNG THỊ TRÌNH
Chế bản : CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

TOÁN 7 - TẬP HAI

Mã số : 2H702T4

Số đăng kí KHXB : 01-2014/CXB/217-1062/GD

In .... cuốn ...., khổ 17 × 24cm. In tại ....

In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm ....

Phần ĐẠI SỐ

Chương III - THỐNG KÊ

Thống kê là một khoa học được ứng dụng rộng rãi trong các hoạt động kinh tế, xã hội. Ta vẫn thường nghe nói đến thống kê dân số, thống kê sản lượng đạt được hàng năm của một ngành sản xuất, của một xí nghiệp,... Ta cũng thường thấy các biểu đồ trên báo chí, trong các cuộc triển lãm, trên vô tuyến truyền hình,... Qua nghiên cứu, phân tích các thông tin thu thập được, khoa học thống kê cùng với các khoa học kĩ thuật khác giúp cho ta biết được tình hình các hoạt động, diễn biến của các hiện tượng, từ đó dự đoán các khả năng có thể xảy ra, góp phần phục vụ lợi ích con người ngày càng tốt hơn. Trong chương này, ta sẽ bước đầu làm quen với Thống kê mô tả, một bộ phận của khoa học thống kê.

§1. Thu thập số liệu thống kê, tần số

Các số liệu thu thập được khi điều tra sẽ được ghi lại ra sao ?

1. Thu thập số liệu, bảng số liệu thống kê ban đầu

Ví dụ : Khi điều tra về *số cây trồng được của mỗi lớp* trong dịp phát động phong trào Tết trồng cây, người điều tra lập bảng dưới đây (bảng 1) :

STT	Lớp	Số cây trồng được
1	6A	35
2	6B	30
3	6C	28
4	6D	30
5	6E	30
6	7A	35
7	7B	28
8	7C	30
9	7D	30
10	7E	35

STT	Lớp	Số cây trồng được
11	8A	35
12	8B	50
13	8C	35
14	8D	50
15	8E	30
16	9A	35
17	9B	35
18	9C	30
19	9D	30
20	9E	50

Bảng 1

Việc làm trên của người điều tra là *thu thập số liệu* về vấn đề được quan tâm. Các số liệu trên được ghi lại trong một bảng, gọi là *bảng số liệu thống kê ban đầu* (bảng 1).

?1 *Hãy quan sát bảng 1 để biết cách lập một bảng số liệu thống kê ban đầu trong các trường hợp tương tự. Chẳng hạn như điều tra số con trong từng gia đình (ghi theo tên các chủ hộ) trong một xóm, một phường,...*

Tuỳ theo yêu cầu của mỗi cuộc điều tra mà các bảng số liệu thống kê ban đầu có thể khác nhau. Ví dụ : Bảng điều tra dân số nước ta tại thời điểm 1/4/1999 phân theo giới tính, phân theo thành thị, nông thôn trong từng địa phương (đơn vị là nghìn người) (trích theo tài liệu của Tổng cục Thống kê (bảng 2)) :

Số dân / Địa phương	Tổng số	Phân theo giới tính		Phân theo thành thị, nông thôn	
		Nam	Nữ	Thành thị	Nông thôn
Hà Nội	2672,1	1336,7	1335,4	1538,9	1133,2
Hải Phòng	1673,0	825,1	847,9	568,2	1104,8
Hưng Yên	1068,7	516,0	552,7	92,6	976,1
Hà Giang	602,7	298,3	304,4	50,9	551,8
Bắc Kạn	275,3	137,6	137,7	39,8	235,5
...	...	...	...	...	...

Bảng 2

2. Dấu hiệu

a) Dấu hiệu, đơn vị điều tra

?2 *Nội dung điều tra trong bảng 1 là gì ?*

Vấn đề hay hiện tượng mà người điều tra quan tâm tìm hiểu gọi là *dấu hiệu* (thường được kí hiệu bằng các chữ in hoa X, Y,...).

Dấu hiệu X ở bảng 1 là *số cây trồng được của mỗi lớp*, còn mỗi lớp là một *đơn vị điều tra*.

?3 *Trong bảng 1 có bao nhiêu đơn vị điều tra ?*

b) Giá trị của dấu hiệu, dãy giá trị của dấu hiệu

Mỗi lớp (đơn vị) trồng được một số cây ; chẳng hạn lớp 7A trồng 35 cây, lớp 8D trồng 50 cây (bảng 1).

Như vậy ứng với mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó gọi là một *giá trị của dấu hiệu*. Số các giá trị (không nhất thiết khác nhau) của dấu hiệu đúng bằng số các đơn vị điều tra (thường được kí hiệu là N).

Trong ví dụ trên thì các giá trị ở cột thứ ba của bảng 1 (kể từ bên trái sang) gọi là *dãy giá trị của dấu hiệu X* (số cây trồng được của mỗi lớp).

?4 *Dấu hiệu X ở bảng 1 có tất cả bao nhiêu giá trị ? Hãy đọc dãy giá trị của X.*

3. Tần số của mỗi giá trị

Tiếp tục quan sát bảng 1.

?5 *Có bao nhiêu số khác nhau trong cột số cây trồng được ? Nêu cụ thể các số khác nhau đó.*

?6 *Có bao nhiêu lớp (đơn vị) trồng được 30 cây (hay giá trị 30 xuất hiện bao nhiêu lần trong dãy giá trị của dấu hiệu X) ? Hãy trả lời câu hỏi tương tự như vậy với các giá trị 28, 50.*

Mỗi giá trị có thể xuất hiện một hoặc nhiều lần trong dãy giá trị của dấu hiệu. *Số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu được gọi là tần số của giá trị đó.*

Giá trị của dấu hiệu thường được kí hiệu là x và tần số của giá trị thường được kí hiệu là n. Cần phân biệt n (tần số của một giá trị) với N (số các giá trị). Cũng như vậy, cần phân biệt X (kí hiệu đối với dấu hiệu) và x (kí hiệu đối với giá trị của dấu hiệu).

?7 *Trong dãy giá trị của dấu hiệu ở bảng 1 có bao nhiêu giá trị khác nhau ? Hãy viết các giá trị đó cùng tần số của chúng.*

- *Các số liệu thu thập được khi điều tra về một dấu hiệu gọi là số liệu thống kê. Mỗi số liệu là một giá trị của dấu hiệu.*
- *Số tất cả các giá trị (không nhất thiết khác nhau) của dấu hiệu bằng số các đơn vị điều tra.*
- *Số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu là tần số của giá trị đó.*

▶ ***Chú ý :***

– Ta chỉ xem xét, nghiên cứu các dấu hiệu mà giá trị của nó là các số ; tuy nhiên cần lưu ý rằng : không phải mọi dấu hiệu đều có giá trị là số.

Ví dụ : Khi điều tra về sự ham thích đối với bóng đá của một nhóm học sinh thì ứng với một bạn nào đó trong nhóm, người điều tra phải ghi lại mức độ ham thích của bạn ấy theo một trong các mức đã quy định, chẳng hạn : rất thích, thích, không thích.

– Trong trường hợp chỉ chú ý tới các giá trị của dấu hiệu thì bảng số liệu thống kê ban đầu có thể chỉ gồm các cột số. Chẳng hạn, từ bảng 1 ta có bảng 3 dưới đây :

35	30	28	30	30	35	28	30	30	35
35	50	35	50	30	35	35	30	30	50

Bảng 3

Bài tập

1. Lập bảng số liệu thống kê ban đầu cho một cuộc điều tra nhỏ về một dấu hiệu mà em quan tâm (điểm một bài kiểm tra của mỗi em trong lớp, số bạn nghỉ học trong một ngày của mỗi lớp trong trường, số con trong từng gia đình sống gần nhà em,...).

2. Hàng ngày, bạn An thử ghi lại thời gian cần thiết để đi từ nhà đến trường và thực hiện điều đó trong 10 ngày. Kết quả thu được ở bảng 4 :

Số thứ tự của ngày	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Thời gian (phút)	21	18	17	20	19	18	19	20	18	19

Bảng 4

a) Dấu hiệu mà bạn An quan tâm là gì và dấu hiệu đó có tất cả bao nhiêu giá trị ?

b) Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong dãy giá trị của dấu hiệu đó ?

c) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tìm tần số của chúng.

Luyện tập

3. Thời gian chạy 50 mét của các học sinh trong một lớp 7 được thầy giáo dạy Thể dục ghi lại trong hai bảng 5 và 6 :

Số thứ tự của học sinh nam	Thời gian (giây)
1	8,3
2	8,5
3	8,5
4	8,7
5	8,5
6	8,7
7	8,3
8	8,7
9	8,5
10	8,4
11	8,5
12	8,4
13	8,5
14	8,8
15	8,8
16	8,5
17	8,7
18	8,7
19	8,5
20	8,4

Bảng 5

Số thứ tự của học sinh nữ	Thời gian (giây)
1	9,2
2	8,7
3	9,2
4	8,7
5	9,0
6	9,0
7	9,0
8	8,7
9	9,2
10	9,2
11	9,2
12	9,0
13	9,3
14	9,2
15	9,3
16	9,3
17	9,3
18	9,0
19	9,2
20	9,3

Bảng 6

Hãy cho biết :

a) Dấu hiệu chung cần tìm hiểu (ở cả hai bảng)

b) Số các giá trị của dấu hiệu và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu (đối với từng bảng)

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng (đối với từng bảng).

4. Chọn 30 hộp chè một cách tuỳ ý trong kho của một cửa hàng và đem cân, kết quả được ghi lại trong bảng 7 (sau khi đã trừ khối lượng của vỏ) :

Khối lượng chè trong từng hộp (tính bằng gam)		
100	100	101
100	101	100
98	100	100
98	102	98
99	99	102
100	101	101
100	100	100
102	100	100
100	100	99
100	99	100

Bảng 7

Hãy cho biết :

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu và số các giá trị của dấu hiệu đó

b) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

§2. Bảng "tần số" các giá trị của dấu hiệu

Có thể thu gọn bảng số liệu thống kê ban đầu được không ?

1. Lập bảng "tần số"

?1 *Quan sát bảng 7. Hãy vẽ một khung hình chữ nhật gồm hai dòng : Ở dòng trên, ghi lại các giá trị khác nhau của dấu hiệu theo thứ tự tăng dần.*

Ở dòng dưới, ghi các tần số tương ứng dưới mỗi giá trị đó.

Bảng như thế gọi là *bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu*. Tuy nhiên để cho tiện, từ nay trở đi ta sẽ gọi bảng đó là bảng "tần số" Ví dụ · Từ bảng 1 ta có bảng "tần số" sau (bảng 8) :

Giá trị (x)	28	30	35	50	
Tần số (n)	2	8	7	3	N = 20

Bảng 8

2. Chú ý

a) Có thể chuyển bảng "tần số" dạng *"ngang"* như bảng 8 thành bảng *"dọc"* (chuyển dòng thành cột, bảng 9) :

Giá trị (x)	Tần số (n)
28	2
30	8
35	7
50	3
	N − 20

Bảng 9

b) Bảng 8 hoặc bảng 9 giúp chúng ta quan sát, nhận xét về giá trị của dấu hiệu một cách dễ dàng hơn so với bảng 1, đồng thời sẽ có nhiều thuận lợi trong việc tính toán sau này. Chẳng hạn, từ bảng 8 ta có thể nhận xét :

– Tuy số các giá trị của X là 20, song chỉ có bốn giá trị khác nhau là 28, 30, 35, 50

– Chỉ có hai lớp trồng được 28 cây, song lại có đến tám lớp trồng được 30 cây.

– Số cây trồng được của các lớp chủ yếu là 30 cây hoặc 35 cây.

. . . .

– *Từ bảng số liệu thống kê ban đầu có thể lập bảng "tần số" (bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu).*

– *Bảng "tần số" giúp người điều tra dễ có những nhận xét chung về sự phân phối các giá trị của dấu hiệu và tiện lợi cho việc tính toán sau này.*

Bài tập

5. **Trò chơi toán học :** Thống kê ngày, tháng, năm sinh của các bạn trong lớp và những bạn có cùng tháng sinh thì xếp thành một nhóm. Điền kết quả thu được theo mẫu ở bảng 10 :

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Tần số (n)													N =

Bảng 10

6. Kết quả điều tra về số con của 30 gia đình thuộc một thôn được cho trong bảng 11 :

2	2	2	2	2	3	2	1	0	2
2	4	2	3	2	1	3	2	2	2
2	4	1	0	3	2	2	2	3	1

Bảng 11

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì ? Từ đó lập bảng "tần số".

b) Hãy nêu một số nhận xét từ bảng trên về số con của 30 gia đình trong thôn (số con của các gia đình trong thôn chủ yếu thuộc vào khoảng nào ? Số gia đình đông con, tức có 3 con trở lên chỉ chiếm một tỉ lệ bao nhiêu ?).

7. Tuổi nghề (tính theo năm) của một số công nhân trong một phân xưởng được ghi lại ở bảng 12 :

7	2	5	9	7
2	4	4	5	6
7	4	10	2	8
4	3	8	10	4
7	7	5	4	1

Bảng 12

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ?

b) Lập bảng "tần số" và rút ra một số nhận xét (số các giá trị của dấu hiệu, số các giá trị khác nhau, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất, các giá trị thuộc vào khoảng nào là chủ yếu).

Luyện tập

8. Một xạ thủ thi bắn súng. Số điểm đạt được sau mỗi lần bắn được ghi lại ở bảng 13 :

8	9	10	9	9	10	8	7	9	8
10	7	10	9	8	10	8	9	8	8
8	9	10	10	10	9	9	9	8	7

Bảng 13

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Xạ thủ đã bắn bao nhiêu phát ?

b) Lập bảng "tần số" và rút ra một số nhận xét.

9. Thời gian giải một bài toán (tính theo phút) của 35 học sinh được ghi trong bảng 14 :

3	10	7	8	10	9	6
4	8	7	8	10	9	5
8	8	6	6	8	8	8
7	6	10	5	8	7	8
8	4	10	5	4	7	9

Bảng 14

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ?

b) Lập bảng "tần số" và rút ra một số nhận xét.

§3. Biểu đồ

Làm thế nào để biểu diễn các giá trị và tần số của chúng bằng biểu đồ ?

Ngoài bảng số liệu thống kê ban đầu, bảng "tần số", người ta còn dùng biểu đồ để cho một hình ảnh cụ thể về giá trị của dấu hiệu và tần số.

1. Biểu đồ đoạn thẳng

Trở lại với bảng "tần số" được lập từ bảng 1

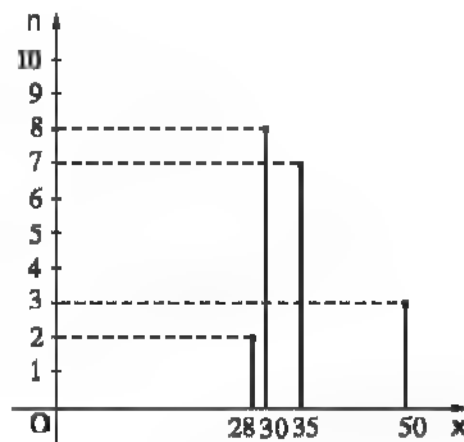
Giá trị (x)	28	30	35	50	
Tần số (n)	2	8	7	3	N = 20

 *Hãy dựng biểu đồ đoạn thẳng theo các bước sau :*

a) Dựng hệ trục toạ độ, trục hoành biểu diễn các giá trị x, trục tung biểu diễn tần số n (độ dài đơn vị trên hai trục có thể khác nhau).

b) Xác định các điểm có toạ độ là cặp số gồm giá trị và tần số của nó : (28 ; 2) ; (30 ; 8) ; ... (Lưu ý : giá trị viết trước, tần số viết sau).

c) Nối mỗi điểm đó với điểm trên trục hoành có cùng hoành độ. Chẳng hạn điểm (28 ; 2) được nối với điểm (28 ; 0) ; ...

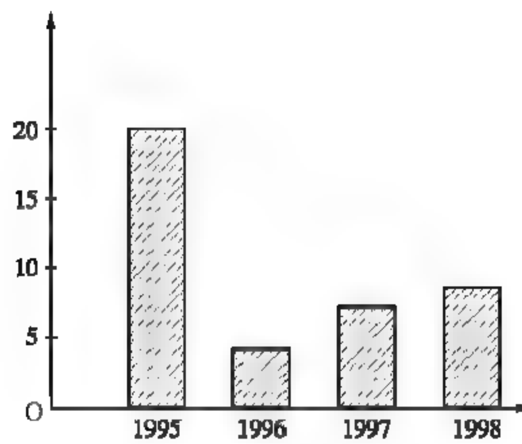


Hình 1

Biểu đồ vừa dựng là một ví dụ về *biểu đồ đoạn thẳng (h. 1)*

2. Chú ý

Bên cạnh các biểu đồ đoạn thẳng thì trong các tài liệu thống kê hoặc trong sách, báo còn gặp loại biểu đồ như ở hình 2 (các đoạn thẳng được thay bằng các hình chữ nhật, cũng có khi các hình chữ nhật được vẽ sát nhau để dễ nhận xét và so sánh), đó là *biểu đồ hình chữ nhật*.



Hình 2

Hình 2 biểu diễn diện tích rừng nước ta bị phá, được thống kê theo từng năm, từ 1995 đến 1998 (đơn vị trục tung · nghìn ha)

Bài tập

10. Điểm kiểm tra Toán (học kì I) của học sinh lớp 7C được cho ở bảng 15 :

Giá trị (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	0	0	0	2	8	10	12	7	6	4	1	N – 50

Bảng 15

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ?

b) Biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng.

11. Từ bảng "tần số" lập được ở bài tập 6, hãy dựng biểu đồ đoạn thẳng.

Luyện tập

12. Nhiệt độ trung bình hàng tháng trong một năm của một địa phương được ghi lại trong bảng 16 (đo bằng độ C) :

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ trung bình	18	20	28	30	31	32	31	28	25	18	18	17

Bảng 16

a) Hãy lập bảng "tần số".

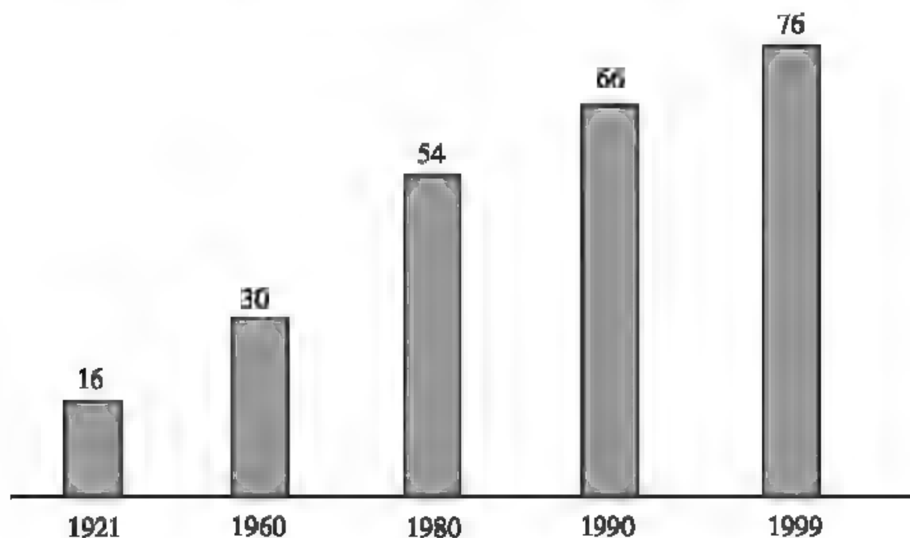
b) Hãy biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng.

13. Hãy quan sát biểu đồ ở hình 3 (đơn vị của các cột là triệu người) và trả lời các câu hỏi :

a) Năm 1921, số dân của nước ta là bao nhiêu ?

b) Sau bao nhiêu năm (kể từ năm 1921) thì dân số nước ta tăng thêm 60 triệu người ?

c) Từ 1980 đến 1999, dân số nước ta tăng thêm bao nhiêu ?



Dân số Việt Nam qua tổng điều tra trong thế kỉ XX.

Hình 3

Bài đọc thêm

a) Tần suất

• Ngoài tần số của một giá trị của dấu hiệu, nhiều khi người ta còn tính *tần suất của giá trị đó theo công thức* $f = \frac{n}{N}$, trong đó :

N là số các giá trị ; n là tần số của một giá trị ; f là tần suất của giá trị đó.

• Trong nhiều bảng "tần số" có thêm dòng (hoặc cột) tần suất. Người ta thường biểu diễn tần suất dưới dạng tỉ số phần trăm.

Ví dụ : Lập lại bảng 8 với dòng tần suất của các giá trị (bảng 17) :

Giá trị (x)	28	30	35	50	
Tần số (n)	2	8	7	3	N = 20
Tần suất (f)	$\frac{2}{20}$ (10%)	$\frac{8}{20}$ (40%)	$\frac{7}{20}$ (35%)	$\frac{3}{20}$ (15%)	

Bảng 17

b) Biểu đồ hình quạt

Bài toán : Hãy biểu diễn bằng biểu đồ kết quả phân loại học tập của học sinh khối 7 của một trường THCS từ bảng 18 :

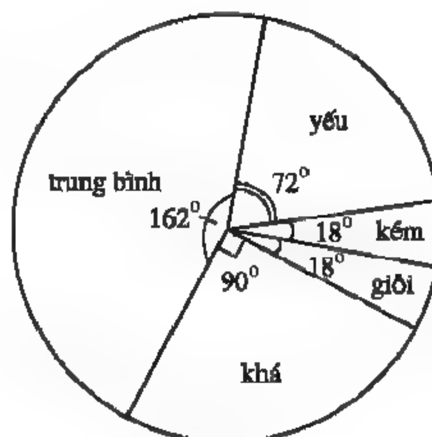
Loại	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu	Kém
Tỉ số (%)	5	25	45	20	5

Bảng 18

Trong trường hợp này, ngoài cách dùng biểu đồ đoạn thẳng và biểu đồ hình chữ nhật, ta có thể dùng biểu đồ hình quạt.

Đó là một hình tròn được chia thành các hình quạt mà góc ở tâm của các hình quạt tỉ lệ với tần suất.

Hình 4 là biểu đồ hình quạt biểu diễn kết quả phân loại học tập của học sinh khối 7 theo bảng 18.



Hình 4

§4. Số trung bình cộng

Số nào có thể là "đại diện" cho các giá trị của dấu hiệu ?

1. Số trung bình cộng của dấu hiệu

a) Bài toán

• Điểm kiểm tra Toán (1 tiết) của học sinh lớp 7C được bạn lớp trưởng ghi lại ở bảng 19 :

3	6	6	7	7	2	9	6
4	7	5	8	10	9	8	7
7	7	6	6	5	8	2	8
8	8	2	4	7	7	6	8
5	6	6	3	8	8	4	7

Bảng 19

?1 *Có tất cả bao nhiêu bạn làm bài kiểm tra ?*

?2 *Hãy nhớ lại quy tắc tính số trung bình cộng để tính điểm trung bình của lớp.*

• Nếu xem dấu hiệu là điểm của bài kiểm tra của mỗi học sinh trong lớp thì có thể lập bảng "tần số" (bảng dọc) có thêm hai cột để tính điểm trung bình (bảng 20) :

Điểm số (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
2	3	6	
3	2	6	
4	3	12	
5	3	15	
6	8	48	
7	9	63	
8	9	72	
9	2	18	
10	1	10	
	N – 40	Tổng : 250	$\overline{X} - \frac{250}{40} - 6,25$

Bảng 20



Chú ý :

Trong bảng trên, tổng số điểm của các bài có điểm số bằng nhau được thay thế bằng tích của điểm số ấy với số bài có cùng điểm số như vậy (tức tích của giá trị với tần số của nó).

b) Công thức

• Từ cách tính ở bảng 20, ta có nhận xét :

Dựa vào bảng "tần số", ta có thể tính số trung bình cộng của một dấu hiệu (gọi tắt là số trung bình cộng và kí hiệu là $\overline{X}$) như sau :

– Nhân từng giá trị với tần số tương ứng.

Cộng tất cả các tích vừa tìm được.

– Chia tổng đó cho số các giá trị (tức tổng các tần số).

• Ta có công thức :

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + ... + x_kn_k}{N}$$

Trong đó : $x_1, x_2, ..., x_k$ là k giá trị khác nhau của dấu hiệu X.

$n_1, n_2, ..., n_k$ là k tần số tương ứng.

N là số các giá trị.

Trong ví dụ trên thì $k - 9$; $x_1 - 2, x_2 - 3, ..., x_9 - 10$; $n_1 - 3, n_2 - 2, ..., n_9 - 1$; $N - 40$.



Kết quả kiểm tra của lớp 7A (với cùng đề kiểm tra của lớp 7C) được cho qua bảng "tần số" sau đây. Hãy dùng công thức trên để tính điểm trung bình của lớp 7A (bảng 21) :

Điểm số (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
3	2		
4	2		
5	4		
6	10		
7	8		
8	10		
9	3		
10	1		
	N = 40	Tổng :	$\overline{X}$ –

Bảng 21

?4 *Hãy so sánh kết quả làm bài kiểm tra Toán nói trên của hai lớp 7C và 7A ?*

2. Ý nghĩa của số trung bình cộng

Số trung bình cộng của dấu hiệu X là một "đại diện" cho dấu hiệu đó khi cần phải trình bày một cách gọn ghẽ hoặc khi phải so sánh với một *dấu hiệu cùng loại* (chẳng hạn, có thể so sánh khả năng học Toán qua một năm học của hai học sinh trong cùng một lớp qua điểm trung bình môn Toán cuối năm học của mỗi bạn).

Số trung bình cộng thường được dùng làm "đại diện" cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các ***dấu hiệu cùng loại****.*

 ***Chú ý :***

– Khi các giá trị của dấu hiệu có khoảng chênh lệch rất lớn đối với nhau thì không nên lấy số trung bình cộng làm "đại diện" cho dấu hiệu đó.

Ví dụ : Xét dấu hiệu X có dãy giá trị là : 4000 1000 500 100.

Không thể lấy số trung bình cộng $\overline{X} = 1400$ làm đại diện cho X vì có sự chênh lệch rất lớn giữa các giá trị (chẳng hạn, 4000 và 100).

– Số trung bình cộng có thể không thuộc dãy giá trị của dấu hiệu.

Ví dụ : 6,25 không phải là một giá trị của dấu hiệu được nêu trong bảng 20.

3. Mốt của dấu hiệu

Ví dụ : Một cửa hàng bán dép ghi lại số dép đã bán cho nam giới trong một quý theo các cỡ khác nhau ở bảng 22 :

Cỡ dép (x)	36	37	38	39	40	41	42	
Số dép bán được (n)	13	45	110	184	126	40	5	N = 523

Bảng 22

Điều mà cửa hàng quan tâm là *cỡ dép nào bán được nhiều nhất*, trong trường hợp này cỡ đó (cỡ 39) sẽ là "đại diện" chứ không phải là số trung bình cộng của các cỡ. Giá trị 39 với tần số lớn nhất (184) được gọi là *mốt*.

• *Mốt của dấu hiệu là* ***giá trị có tần số lớn nhất*** *trong bảng "tần số" ; kí hiệu là* M_0.

Bài tập

14. Hãy tính số trung bình cộng của dấu hiệu ở bài tập 9.

15. Để nghiên cứu "tuổi thọ" của một loại bóng đèn, người ta đã chọn tuỳ ý 50 bóng và bật sáng liên tục cho tới lúc chúng tự tắt. "Tuổi thọ" của các bóng (tính theo giờ) được ghi lại ở bảng 23 (làm tròn đến hàng chục) :

Tuổi thọ (x)	1150	1160	1170	1180	1190	
Số bóng đèn tương ứng (n)	5	8	12	18	7	N = 50

Bảng 23

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì và số các giá trị là bao nhiêu ?

b) Tính số trung bình cộng.

c) Tìm mốt của dấu hiệu.

Luyện tập

16. Quan sát bảng "tần số" (bảng 24) và cho biết có nên dùng số trung bình cộng làm "đại diện" cho dấu hiệu không ? Vì sao ?

Giá trị (x)	2	3	4	90	100	
Tần số (n)	3	2	2	2	1	N − 10

Bảng 24

17. Theo dõi thời gian làm một bài toán (tính bằng phút) của 50 học sinh, thầy giáo lập được bảng 25 :

Thời gian (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Tần số (n)	1	3	4	7	8	9	8	5	3	2	N = 50

Bảng 25

a) Tính số trung bình cộng.

b) Tìm mốt của dấu hiệu.

18. Đo chiều cao của 100 học sinh lớp 6 (đơn vị đo : cm) và được kết quả theo bảng 26 :

Chiều cao (sắp xếp theo khoảng)	Tần số (n)
105	1
110 120	7
121 – 131	35
132 – 142	45
143 - 153	11
155	1
	N – 100

Bảng 26

a) Bảng này có gì khác so với những bảng "tần số" đã biết ?

b) Ước tính số trung bình cộng trong trường hợp này.

(*Hướng dẫn :*

Tính số trung bình cộng của từng khoảng. Số đó chính là trung bình cộng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của khoảng. Ví dụ : trung bình cộng của khoảng 110 – 120 là 115.

Nhân các số trung bình vừa tìm được với các tần số tương ứng.

– Thực hiện tiếp các bước theo quy tắc đã học).

19. Số cân nặng (tính bằng kilôgam) của 120 em của một trường mẫu giáo ở thành phố A được ghi lại trong bảng 27 :

17	20	20	18	19	19	18,5	21	18,5	21
18	19	18,5	19	19	17	19	20	17,5	21
18	19,5	18	17	19,5	16,5	19	19	17,5	18
18	18,5	17	18,5	16	17	20	19	21,5	19
19,5	18	16,5	17	16,5	17	20	18,5	16	18,5
18,5	16,5	16,5	20	19	17	16,5	19	24	17,5
20	17,5	17,5	19,5	18	18,5	15	17,5	23,5	15
17,5	16,5	18	20	18,5	19	17,5	16	20	28
21	16	19	21	17,5	20	16,5	16	19,5	20
21	16	20	20	17,5	20	18	25	18	20
20	16,5	21	18	18	20,5	17	17	18	17,5
20	21	21	18	19	28	17	18	17,5	17

Bảng 27

Hãy tính số trung bình cộng (có thể sử dụng máy tính bỏ túi).

Ôn tập chương III

Câu hỏi ôn tập

1. Muốn thu thập các số liệu về một vấn đề mà mình quan tâm, chẳng hạn như màu sắc mà mỗi bạn trong lớp ưa thích thì em phải làm những việc gì và trình bày kết quả thu được theo mẫu bảng nào ?

2. Tần số của một giá trị là gì ? Có nhận xét gì về tổng các tần số ?

3. Bảng "tần số" có thuận lợi gì hơn so với bảng số liệu thống kê ban đầu ?

4. Làm thế nào để tính số trung bình cộng của một dấu hiệu ?

Nêu rõ các bước tính. Ý nghĩa của số trung bình cộng. Khi nào thì số trung bình cộng khó có thể là đại diện cho dấu hiệu đó ?

Bài tập

20. Điều tra năng suất lúa xuân năm 1990 của 31 tỉnh thành từ Nghệ An trở vào, người điều tra lập được bảng 28 :

a) Lập bảng "tần số".

b) Dựng biểu đồ đoạn thẳng.

c) Tính số trung bình cộng.

STT	Tỉnh, thành phố	Năng suất (tạ/ha)	STT	Tỉnh, thành phố	Năng suất (tạ/ha)
1	Nghệ An	30	16	Bình Dương	30
2	Hà Tĩnh	30	17	Đồng Nai	30
3	Quảng Bình	20	18	Bình Thuận	40
4	Quảng Trị	25	19	Bà Rịa - Vũng Tàu	30
5	Thừa Thiên – Huế	35	20	Long An	25
6	Đà Nẵng	45	21	Đồng Tháp	35
7	Quảng Nam	40	22	An Giang	35
8	Quảng Ngãi	40	23	Tiền Giang	45
9	Bình Định	35	24	Vĩnh Long	35
10	Phú Yên	50	25	Bến Tre	35
11	Khánh Hoà	45	26	Kiên Giang	35
12	TP. Hồ Chí Minh	35	27	Cần Thơ	30
13	Lâm Đồng	25	28	Trà Vinh	40
14	Ninh Thuận	45	29	Sóc Trăng	40
15	Tây Ninh	30	30	Bạc Liêu	40
			31	Cà Mau	35

Bảng 28

21. Sưu tầm trên sách, báo một biểu đồ (đoạn thẳng, hình chữ nhật hoặc hình quạt) về một vấn đề nào đó và nêu nhận xét.

§1. Khái niệm về biểu thức đại số

1. Nhắc lại về biểu thức

Ở các lớp dưới ta đã biết : các số được nối với nhau bởi dấu các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa) làm thành một biểu thức.

Chẳng hạn : $5 + 3 - 2$; $12 : 6 . 2$; $15^3 . 4^7$; $4 . 3^2 - 5 . 6$; $13 \quad (3 + 4)$ là những biểu thức

Những biểu thức như trên còn được goi là *biểu thức số*.

Ví dụ : Viết biểu thức số biểu thị chu vi của hình chữ nhật có chiều rộng bằng 5 (cm) và chiều dài bằng 8 (cm).

Biểu thức số biểu thị chu vi của hình chữ nhật đó là : 2.(5 + 8).

?1 *Hãy viết biểu thức số biểu thị diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng bằng 3 (cm) và chiều dài hơn chiều rộng 2 (cm).*

2. Khái niệm về biểu thức đại số

Xét bài toán : Viết biểu thức biểu thị chu vi của hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng 5 (cm) và a (cm).

Trong bài toán trên, người ta đã dùng chữ a để viết thay cho một số nào đó (hay còn nói : chữ a đại diện cho một số nào đó). Bằng cách tương tự như đã làm ở ví dụ trên, ta có biểu thức biểu thị chu vi của hình chữ nhật nói trong bài toán là : 2.(5 + a).

Khi a = 2 thì biểu thức trên biểu thị chu vi của hình chữ nhật có hai cạnh bằng 5 (cm) và 2 (cm) ; còn khi a = 3,5 thì biểu thức trên biểu thị chu vi của hình chữ nhật có hai cạnh bằng 5 (cm) và 3,5 (cm) ; ...

Như vậy, ta có thể dùng biểu thức trên để biểu thị chu vi của các hình chữ nhật có một cạnh bằng 5 (cm).

?2 *Viết biểu thức biểu thị diện tích của các hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 2 (cm).*

Trong toán học, vật lí, ... ta thường gặp những biểu thức mà trong đó ngoài các số, các kí hiệu phép toán cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa, còn có cả các chữ (đại diện cho các số). Người ta gọi những biểu thức như vậy là *biểu thức đại số*.

Ví dụ : Các biểu thức : $4x$; $2(5 + a)$; $3(x + y)$; x^2 ; xy ; $\frac{150}{t}$; $\frac{1}{x - 0,5}$

là những biểu thức đại số.

Để cho gọn, khi viết các biểu thức đại số, người ta thường không viết dấu nhân giữa các chữ, cũng như giữa số và chữ. Chẳng hạn, ta viết xy (nhân số x với số y) thay cho x.y, viết 4x (nhân 4 với số x) thay cho 4.x, ... Thông thường, trong một tích, người ta không viết thừa số 1, còn thừa số (–1) được thay bằng dấu "–" ; chẳng hạn, ta viết x thay cho 1x, và viết –xy thay cho (–1)xy, ... Trong biểu thức đại số, người ta cũng dùng các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính.

?3 *Viết biểu thức đại số biểu thị :*

a) Quãng đường đi được sau x (h) của một ô tô đi với vận tốc 30 km/h ;

b) Tổng quãng đường đi được của một người, biết rằng người đó đi bộ trong x (h) với vận tốc 5km/h và sau đó đi bằng ô tô trong y (h) với vận tốc 35 km/h.

Trong biểu thức đại số, các chữ có thể đại diện cho những số *tuỳ ý* nào đó. Người ta gọi những chữ như vậy là *biến số* (còn gọi tắt là *biến*).

 ***Chú ý :***

– Trong biểu thức đại số, vì chữ đại diện cho số nên khi thực hiện các phép toán trên các chữ, ta có thể áp dung những tính chất, quy tắc phép toán như trên các số. Chẳng hạn :

$x + y = y + x$; $xy = yx$; $xxx = x^3$; $(x + y) + z = x + (y + z)$;

$(xy)z = x(yz)$; $x(y + z) = xy + xz$; $-(x + y - z) = -x - y + z$; ...

Các biểu thức đại số có chứa biến ở mẫu, chẳng hạn như $\frac{150}{t}$; $\frac{1}{x - 0,5}$

(với các biến t, x nằm ở mẫu) chưa được xét đến trong chương này.



Có thể em chưa biết

Vào năm 820, nhà toán học nổi tiếng người Trung Á đã viết một cuốn sách về toán học. Tên cuốn sách này được dịch sang tiếng Anh với tiêu đề Algebra, Algebra dịch sang tiếng Việt là Đại số.

Tác giả cuốn sách tên là Al–Khowârizmi (đọc là An-khô va-ri-zmi). Ông được biết đến như là cha đẻ của môn Đại số. Ông dành cả đời mình nghiên cứu về đại số và đã có nhiều phát minh quan trọng trong lĩnh vực toán học

Ông cũng là nhà thiên văn học, nhà địa lí học nổi tiếng. Ông đã góp phần rất quan trọng trong việc vẽ bản đồ thế giới thời bấy giờ.



An khô va ri zmi

Bài tập

1. Hãy viết các biểu thức đại số biểu thị :

a) Tổng của x và y

b) Tích của x và y

c) Tích của tổng x và y với hiệu của x và y.



2. Viết biểu thức đại số biểu thị diện tích hình thang có đáy lớn là a, đáy nhỏ là b, đường cao là h (a, b và h có cùng đơn vị đo).

3. Dùng bút chì nối các ý 1), 2), ..., 5) với a), b), ..., e) sao cho chúng có cùng ý nghĩa (chẳng hạn như nối ý 1) với e)) .

1)	$x - y$	a)	Tích của x và y
2)	$5y$	b)	Tích của 5 và y
3)	xy	c)	Tổng của 10 và x
4)	$10 + x$	d)	Tích của tổng x và y với hiệu của x và y.
5)	$(x + y)(x - y)$	e)	Hiệu của x và y

4. Một ngày mùa hè, buổi sáng nhiệt độ là t độ, buổi trưa nhiệt độ tăng thêm x độ so với buổi sáng, buổi chiều lúc mặt trời lặn nhiệt độ lại giảm đi y độ so với buổi trưa. Hãy viết biểu thức đại số biểu thị nhiệt độ lúc mặt trời lặn của ngày đó theo t, x, y.

5. Một người được hưởng mức lương là a đồng trong một tháng.

   Hỏi người đó nhận được bao nhiêu tiền, nếu :

   a) Trong một quý lao động, người đó bảo đảm đủ ngày công và làm việc có hiệu suất cao nên được thưởng thêm m đồng ?

   b) Trong hai quý lao động, người đó bị trừ n đồng ($n < a$) vì nghỉ một ngày công không phép ?

§2. Giá trị của một biểu thức đại số

1. Giá trị của một biểu thức đại số

Ví dụ 1 : Cho biểu thức $2m + n$. Hãy thay $m = 9$ và $n = 0,5$ vào biểu thức đó rồi thực hiện phép tính.

Giải : Thay $m = 9$ và $n = 0,5$ vào biểu thức đã cho, ta được :

$$2 . 9 + 0,5 = 18,5.$$

Ta nói : 18,5 là *giá trị của biểu thức* $2m + n$ *tại* $m = 9$ *và* $n = 0,5$ hay còn nói : *tại* $m = 9$ *và* $n = 0,5$ thì *giá trị của biểu thức* $2m + n$ là 18,5.

Ví dụ 2 : Tính giá trị của biểu thức $3x^2 - 5x + 1$ tại $x = -1$ và tại $x = \frac{1}{2}$.

Giải :

– Thay $x = -1$ vào biểu thức trên, ta có : $3.(-1)^2 - 5.(-1) + 1 = 9$.

Vậy giá trị của biểu thức $3x^2 - 5x + 1$ tại $x = -1$ là 9.

– Thay $x = \frac{1}{2}$ vào biểu thức trên, ta có :

$$3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5.\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 3.\left(\frac{1}{4}\right) - 5.\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4} - \frac{5}{2} + 1 = -\frac{3}{4}.$$

Vậy giá trị của biểu thức $3x^2 - 5x + 1$ tại $x = \frac{1}{2}$ là $-\frac{3}{4}$.

Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay các giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

2. Áp dụng

?1 *Tính giá trị của biểu thức* $3x^2 - 9x$ *tại* $x = 1$ *và tại* $x = \frac{1}{3}$.

?2 *Đọc số em chọn để được câu đúng :*

Giá trị của biểu thức x^2y tại $x = -4$ và $y = 3$ là



– 48
144
24
48

Bài tập

6. **Đố : Giải thưởng toán học Việt Nam** (dành cho giáo viên và học sinh phổ thông) **mang tên nhà toán học nổi tiếng nào ?**

(Quê ông ở Hà Tĩnh. Ông là người thầy của nhiều thế hệ các nhà toán học nước ta trong thế kỉ XX).



Hãy tính giá trị của các biểu thức sau tại $x = 3$, $y = 4$ và $z = 5$ rồi viết các chữ tương ứng với các số tìm được vào các ô trống dưới đây, em sẽ trả lời được câu hỏi trên :

N x^2 ; **Ê** $2z^2 + 1$

T y^2 ; **H** $x^2 + y^2$

Ă $\frac{1}{2}(xy + z)$; **V** $z^2 - 1$

L $x^2 - y^2$; **I** Biểu thức biểu thị chu vi của hình chữ nhật có các cạnh là y, z

M Biểu thức biểu thị cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là x, y

–7	51	24	8,5	9	16	25	18	51	5

7. Tính giá trị của các biểu thức sau tại m = –1 và n = 2 :

a) $3m - 2n$; b) $7m + 2n - 6$.

8. **Đố** : Ước tính số gạch cần mua ?

Giả sử gia đình em cần lát một nền nhà hình chữ nhật bằng gạch hình vuông có cạnh là 30cm

Hãy đo kích thước nền nhà đó rồi ghi vào ô trống trong bảng sau :

Chiều rộng (m)	Chiều dài (m)	Số gạch cần mua(viên)
x	y	$\frac{xy}{0,09}$
5,5	6,8	Khoảng 416 (viên)
...	...	...

9. Tính giá trị của biểu thức $x^2y^3 + xy$ tại $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$.

Có thể em chưa biết

TOÁN HỌC VỚI SỨC KHOẺ CON NGƯỜI

Em có tưởng tượng được hai lá phổi (gọi tắt là phổi) của mình chứa khoảng bao nhiêu lít không khí hay không ? Dung tích phổi của mỗi người phụ thuộc vào một số yếu tố, trong đó hai yếu tố quan trọng là chiều cao và độ tuổi

Sau đây là một công thức ước tính dung tích chuẩn phổi của mỗi người :

Nam : $P = 0,057h - 0,022a - 4,23$

Nữ : $Q = 0,041h - 0,018a - 2,69$,

trong đó :

h : chiều cao tính bằng xentimét,

a : tuổi tính bằng năm,

P, Q : dung tích chuẩn của phổi tính bằng lít

Ví dụ : Bạn Lan (nữ) 13 tuổi, cao 140cm thì dung tích chuẩn phổi của Lan tính theo công thức trên là :

$0,041 \times 140 - 0,018 \times 13 - 2,69 = 2,816$ (lít).

Giả sử Lan hít một hơi thật sâu rồi thổi thật căng quả bóng. Nếu quả bóng sau khi thổi có đường kính bằng 17 cm thì theo công thức tính thể tích hình cầu bán kính R là $\frac{4}{3}\pi R^3$, dung tích phổi của Lan sẽ vào khoảng .

$$\frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 8{,}5 \times 8{,}5 \times 8{,}5 \approx 2571(\text{cm}^3) \approx 2{,}571 \text{ (lít)}.$$

Như vậy, bạn Lan cần rèn luyện, tập thể dục nhiều hơn cũng như cần bố trí thời gian học tập, vui chơi và có chế độ ăn uống hợp lí !

Em thử tính theo công thức trên để biết dung tích chuẩn phổi của mình, rồi thổi bóng và xét xem mình đã đạt mức chuẩn chưa.

§3. Đơn thức

Những biểu thức nào được gọi là đơn thức ?

1. Đơn thức

?1 *Cho các biểu thức đại số :*

$$4xy^2 \quad ; \quad 3 \quad 2y \quad ; \quad \frac{3}{5}x^2y^3x \quad ; \quad 10x + y \; ;$$

$$5(x + y) \quad ; \quad 2x^2\left(-\frac{1}{2}\right)y^3x \quad ; \quad 2x^2y \quad ; \quad -2y$$

Hãy sắp xếp chúng thành hai nhóm :

Nhóm 1 : Những biểu thức có chứa phép cộng, phép trừ.

Nhóm 2 : Các biểu thức còn lại.

Các biểu thức đại số trong nhóm 2 là những ví dụ về đơn thức.

> *Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.*

Ví dụ 1 : Các biểu thức 9 ; $\frac{3}{5}$; x ; y ; $2x^3y$; $-xy^2z^5$; $\frac{3}{4}x^3y^2xz$ là những đơn thức.

Ví dụ 2 : Các biểu thức trong nhóm 1 nói trên không phải là đơn thức.

 ***Chú ý :***

Số 0 được gọi là *đơn thức không*.

?2 *Cho một số ví dụ về đơn thức.*

2. Đơn thức thu gọn

Xét đơn thức $10x^6y^3$.

Trong đơn thức trên, các biến x, y có mặt một lần dưới dạng một luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Ta nói đơn thức $10x^6y^3$ là *đơn thức thu gọn* ; 10 là *hệ số* và x^6y^3 là *phần biến* của đơn thức đó.

Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Số nói trên gọi là *hệ số*, phần còn lại gọi là *phần biến* của đơn thức thu gọn.

Ví dụ 1 : Các đơn thức x ; $-y$; $3x^2y$; $10xy^5$ là những đơn thức thu gọn, có hệ số lần lượt là 1 ; –1 ; 3 ; 10 và có phần biến lần lượt là x ; y ; x^2y ; xy^5.

Ví dụ 2 : Các đơn thức xyx ; $5xy^2zyx^3$ không phải là đơn thức thu gọn.

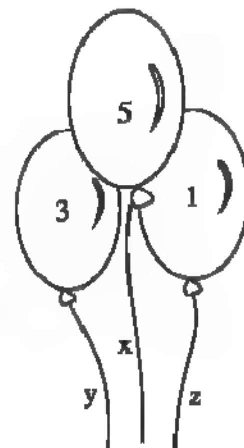
▶ ***Chú ý :***

– Ta cũng coi một số là đơn thức thu gọn

– Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần. Thông thường, khi viết đơn thức thu gọn ta viết hệ số trước, phần biến sau và các biến được viết theo thứ tự bảng chữ cái.

Từ nay, khi nói đến đơn thức, nếu không nói gì thêm, ta hiểu đó là đơn thức thu gọn.

3. Bậc của một đơn thức



Trong đơn thức $2x^5y^3z$, biến x có số mũ là 5 ; biến y có số mũ là 3 ; biến z có số mũ là 1

Tổng các số mũ của các biến là 5 + 3 + 1 = 9. Ta nói 9 là bậc của đơn thức đã cho.

Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.

Số thực khác 0 là đơn thức bậc không.
Số 0 được coi là đơn thức không có bậc.

4. Nhân hai đơn thức

- Cho hai biểu thức số : $A = 3^2.16^7$ và $B = 3^4.16^6$.

Dựa vào tính chất giao hoán, kết hợp của phép nhân các số và quy tắc nhân hai luỹ thừa cùng cơ số, ta có thể thực hiện phép nhân A với B như sau :

$$A.B = (3^2.16^7).(3^4.16^6) = (3^2.3^4).(16^7.16^6) = 3^6.16^{13}.$$

• Bằng cách tương tự, ta có thể thực hiện phép nhân hai đơn thức.

Ví dụ : Để nhân hai đơn thức $2x^2y$ và $9xy^4$, ta làm như sau :

$$(2x^2y).(9xy^4) = (2.9)(x^2y)(xy^4) = 18(x^2x)(yy^4) = 18x^3y^5.$$

Ta nói đơn thức $18x^3y^5$ là *tích* của hai đơn thức $2x^2y$ và $9xy^4$.

▶ ***Chú ý :***

– Để nhân hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

Mỗi đơn thức đều có thể viết thành một đơn thức thu gọn. Chẳng hạn, viết đơn thức sau thành đơn thức thu gọn :

$$5x^4y(-2)xy^2(-3)x^3 = [5(-2)(-3)](x^4y)(xy^2)x^3 = 30(x^4xx^3)(yy^2) = 30x^8y^3.$$

?3 *Tìm tích của :* $-\frac{1}{4}x^3$ *và* $-8xy^2$.

Bài tập

10. Bạn Bình viết ba ví dụ về đơn thức như sau :

$(5 - x)x^2$; $-\frac{5}{9}x^2y$; -5.

Em hãy kiểm tra xem bạn viết đã đúng chưa

11. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức ?

a) $\frac{2}{5} + x^2y$; b) $9\,x^2yz$; c) $15{,}5$; d) $1 - \frac{5}{9}x^3$.

12. a) Cho biết phần hệ số, phần biến của mỗi đơn thức sau :

$2{,}5x^2y$; $0{,}25x^2y^2$.

b) Tính giá trị của mỗi đơn thức trên tại $x = 1$ và $y = -1$.

13. Tính tích của các đơn thức sau rồi tìm bậc của đơn thức thu được :

a) $-\frac{1}{3}x^2y$ và $2xy^3$; b) $\frac{1}{4}x^3y$ và $-2\,x^3y^5$.

14. Hãy viết các đơn thức với biến x, y và có giá trị bằng 9 tại $x = -1$ và $y = 1$.

§4. Đơn thức đồng dạng

Khi nào các đơn thức được gọi là đồng dạng với nhau ?

1. Đơn thức đồng dạng

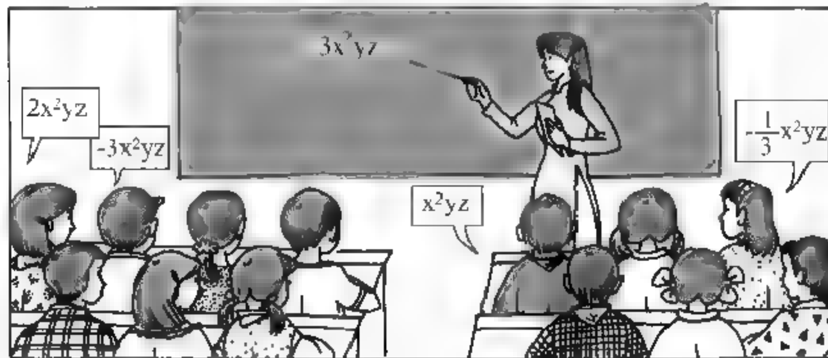
?1 *Cho đơn thức* $3x^2yz$.

a) Hãy viết ba đơn thức có phần biến giống phần biến của đơn thức đã cho.

b) Hãy viết ba đơn thức có phần biến khác phần biến của đơn thức đã cho.

Các đơn thức viết đúng theo yêu cầu của câu a) là các ví dụ về đơn thức đồng dạng, còn các đơn thức viết đúng theo yêu cầu câu b) là các ví dụ về đơn thức không đồng dạng.

I



Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.

Ví dụ : $2x^3y^2$; $5x^3y^2$ và $\frac{1}{4}x^3y^2$ là những đơn thức đồng dạng.

 ***Chú ý :***

Các số khác 0 được coi là những đơn thức đồng dạng.

?2 ***Ai đúng ?*** *Khi thảo luận nhóm, bạn Sơn nói :* "$0,9xy^2$ *và* $0,9x^2y$ *là hai đơn thức đồng dạng*" *Bạn Phúc nói : "Hai đơn thức trên không đồng dạng". Ý kiến của em ?*



2. Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng

• Cho hai biểu thức số : $A = 2.7^2.55$ và $B = 7^2.55$.

Dựa vào tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng các số, ta có thể thực hiện phép cộng A với B như sau :

$$A + B = 2.7^2.55 + 7^2.55 = (2 + 1).7^2.55 = 3.7^2.55.$$

• Bằng cách tương tự, ta có thể thực hiện các phép tính cộng và trừ hai đơn thức đồng dạng.

Ví dụ 1 : Để cộng đơn thức $2x^2y$ với đơn thức x^2y, ta làm như sau :

$$2x^2y + x^2y = (2 + 1)x^2y = 3x^2y.$$

Ta nói đơn thức $3x^2y$ là *tổng* của hai đơn thức $2x^2y$ và x^2y.

Ví dụ 2 : Để trừ hai đơn thức $3xy^2$ và $7xy^2$, ta làm như sau :

$$3xy^2 - 7xy^2 = (3 - 7)xy^2 = -4xy^2.$$

Ta nói đơn thức $-4xy^2$ là *hiệu* của hai đơn thức $3xy^2$ và $7xy^2$.

Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến

?3 *Hãy tìm tổng của ba đơn thức :* xy^3 ; $5xy^3$ *và* $-7xy^3$.

Thi viết nhanh : Mỗi tổ trưởng viết một đơn thức bậc 5 có hai biến. Mỗi thành viên trong tổ viết một đơn thức đồng dạng với đơn thức mà tổ trưởng của mình vừa viết rồi chuyển cho tổ trưởng. Tổ trưởng tính tổng của tất cả các đơn thức của tổ mình và lên bảng viết kết quả. Tổ nào viết đúng và nhanh nhất thì tổ đó giành chiến thắng.

Bài tập

15. Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng :

$$\frac{5}{3}x^2y\ ; \quad xy^2\ ; \quad -\frac{1}{2}x^2y\ ; \quad -2xy^2\ ; \quad x^2y\ ;$$

$$\frac{1}{4}xy^2\ ; \quad -\frac{2}{5}x^2y\ ; \quad xy.$$

16. Tìm tổng của ba đơn thức : $25xy^2$; $55xy^2$ và $75xy^2$.

17. Tính giá trị của biểu thức sau tại x = 1 và y = –1 :

$$\frac{1}{2}x^5y - \frac{3}{4}x^5y + x^5y.$$

18. **Đố :**



Tên của tác giả cuốn **Đại Việt sử kí** dưới thời vua Trần Nhân Tông được đặt cho một đường phố của Thủ đô Hà Nội. Em sẽ biết tên tác giả đó bằng cách tính các tổng và hiệu dưới đây rồi viết chữ tương ứng vào ô dưới kết quả được cho trong bảng sau :

V $2x^2 + 3x^2 - \frac{1}{2}x^2$;

Ư $5xy \quad \frac{1}{3}xy + xy$;

N $-\frac{1}{2}x^2 + x^2$;

U $-6x^2y - 6x^2y$;

H $xy - 3xy + 5xy$;

Ê $3xy^2 - (-3xy^2)$;

Á $7y^2z^3 + (\ 7y^2z^3)$;

L $\frac{1}{5}x^2 + \left(\ \frac{1}{5}x^2\right)$.

$-\frac{2}{5}x^2$	$6xy^2$	$\frac{9}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}x^2$	$3xy$	$\frac{17}{3}xy$	$-12x^2y$

Luyện tập

19. Tính giá trị của biểu thức $16x^2y^5 - 2x^3y^2$ tại $x = 0,5$ và $y = -1$.

20. Viết ba đơn thức đồng dạng với đơn thức $-2x^2y$ rồi tính tổng của cả bốn đơn thức đó.

21. Tính tổng của các đơn thức :

$$\frac{3}{4}xyz^2 \quad ; \quad \frac{1}{2}xyz^2 \quad ; \quad -\frac{1}{4}xyz^2.$$

22. Tính tích các đơn thức sau rồi tìm bậc của đơn thức nhận được :

a) $\frac{12}{15}x^4y^2$ và $\frac{5}{9}xy$.

b) $-\frac{1}{7}x^2y$ và $-\frac{2}{5}xy^4$.

23. Điền các đơn thức thích hợp vào ô trống :

a) $3x^2y + \square = 5x^2y$

b) $\square - 2x^2 = -7x^2$

c) $\square + \square + \square = x^5$.

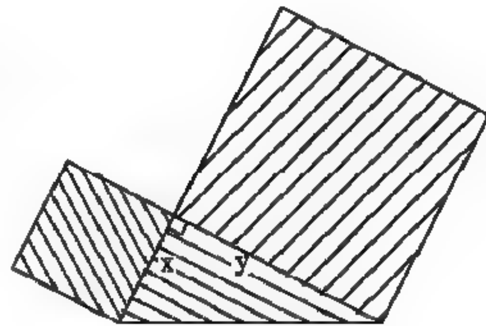
§5. Đa thức

1. Đa thức

Xét các biểu thức :

a) Biểu thức biểu thị diện tích của hình tạo bởi một tam giác vuông và hai hình vuông dựng về phía ngoài trên hai cạnh góc vuông x, y của tam giác đó :

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}xy$$



b) $3x^2 - y^2 + \frac{5}{3}xy - 7x$

c) $x^2y - 3xy + 3x^2y - 3 + xy - \frac{1}{2}x + 5$.

Các biểu thức trên là những ví dụ về *đa thức*.

Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

Chẳng hạn, đa thức $3x^2 - y^2 + \frac{5}{3}xy - 7x$ có thể được viết như sau :

$(3x^2) + (-y^2) + \left(\frac{5}{3}xy\right) + (-7x)$; do đó các hạng tử của nó là :

$$3x^2 ; \quad -y^2 ; \quad \frac{5}{3}xy ; \quad -7x.$$

Để cho gọn, ta có thể kí hiệu đa thức bằng các chữ in hoa A, B, M, N, P, Q,... Chẳng hạn, khi kí hiệu đa thức trên là P, ta viết :

$$P = 3x^2 - y^2 + \frac{5}{3}xy - 7x.$$

?1 *Hãy viết một đa thức và chỉ rõ các hạng tử của đa thức đó.*

► ***Chú ý :*** Mỗi đơn thức được coi là một đa thức.

2. Thu gọn đa thức

Trong đa thức ở câu c) mục 1 có những hạng tử là các đơn thức đồng dạng (còn gọi tắt là hạng tử đồng dạng). Thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng, ta được :

$$N = x^2y - 3xy + 3x^2y - 3 + xy - \frac{1}{2}x + 5 = 4x^2y - 2xy - \frac{1}{2}x + 2.$$

Trong đa thức $4x^2y - 2xy - \frac{1}{2}x + 2$ không còn hai hạng tử nào đồng dạng.

Ta gọi đa thức đó là dạng thu gọn của đa thức N.

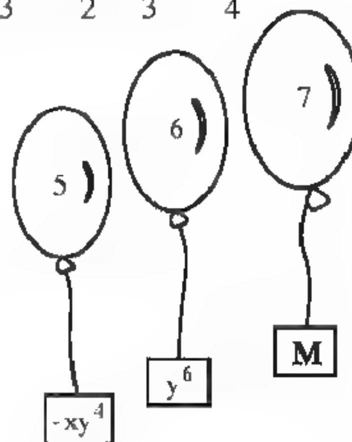
?2 *Hãy thu gọn đa thức sau :*

$$Q = 5x^2y - 3xy + \frac{1}{2}x^2y - xy + 5xy - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$$

3. Bậc của đa thức

Cho đa thức :

$M = x^2y^5 - xy^4 + y^6 + 1$. Trong đa thức đó, hạng tử x^2y^5 có bậc 7 ; hạng tử xy^4 có bậc 5 ; hạng tử y^6 có bậc 6 ; hạng tử 1 có bậc 0. Bậc cao nhất trong các bậc đó là 7. Ta nói 7 là bậc của đa thức M.



Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

 ***Chú ý :***

– Số 0 cũng được gọi là đa thức không và nó không có bậc.

– Khi tìm bậc của một đa thức, trước hết ta phải thu gọn đa thức đó.

?1 *Tìm bậc của đa thức* $Q = -3x^5 - \frac{1}{2}x^3y - \frac{3}{4}xy^2 + 3x^5 + 2.$

Bài tập

24. Ở Đà Lạt, giá táo là x(đ/kg) và giá nho là y(đ/kg). Hãy viết biểu thức đại số biểu thị số tiền mua :

a) 5 kg táo và 8 kg nho.

b) 10 hộp táo và 15 hộp nho, biết mỗi hộp táo có 12 kg và mỗi hộp nho có 10 kg.

Mỗi biểu thức tìm được ở hai câu trên có là đa thức không ?



25. Tìm bậc của mỗi đa thức sau :

a) $3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 + 2x - x^2$;   b) $3x^2 + 7x^3 - 3x^3 + 6x^3 - 3x^2$.

26. Thu gọn đa thức sau : $Q = x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - z^2$.

27. Thu gọn rồi tính giá trị của đa thức P tại x = 0,5 và y = 1 :

$$P = \frac{1}{3}x^2y + xy^2 - xy + \frac{1}{2}xy^2 - 5xy - \frac{1}{3}x^2y.$$

28. **Ai đúng ? Ai sai ?**

Bạn Đức đố : "Bậc của đa thức $M = x^6 - y^5 + x^4y^4 + 1$ bằng bao nhiêu ?"

Bạn Thọ nói : "Đa thức M có bậc là 6".

Bạn Hương nói : "Đa thức M có bậc là 5".

Bạn Sơn nhận xét : "Cả hai bạn đều sai".

Theo em, ai đúng ? Ai sai ? Vì sao ?

§6. Cộng, trừ đa thức

Dựa vào quy tắc "dấu ngoặc" và tính chất của các phép tính trên số, ta có thể cộng, trừ các biểu thức số. Bằng cách tương tự, ta có thể thực hiện các phép toán cộng và trừ hai đa thức.

1. Cộng hai đa thức

Để cộng hai đa thức $M = 5x^2y + 5x \quad 3$ và $N = xyz \quad 4x^2y + 5x \quad \frac{1}{2}$, ta làm như sau ·

$M + N = (5x^2y + 5x - 3) + (xyz - 4x^2y + 5x - \frac{1}{2})$

$- 5x^2y + 5x - 3 + xyz - 4x^2y + 5x - \frac{1}{2}$ (bỏ dấu ngoặc)

$= (5x^2y - 4x^2y) + (5x + 5x) + xyz + (-3 - \frac{1}{2})$ (áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp)

$x^2y + 10x + xyz - 3\frac{1}{2}$ (cộng, trừ các đơn thức đồng dạng)

Ta nói đa thức $x^2y + 10x + xyz - 3\frac{1}{2}$ là *tổng* của hai đa thức M, N.

?1 *Viết hai đa thức rồi tính tổng của chúng*

2. Trừ hai đa thức

Để trừ hai đa thức $P = 5x^2y \quad 4xy^2 + 5x \quad 3$ và $Q = xyz \quad 4x^2y + xy^2 + 5x \quad \frac{1}{2}$, ta làm như sau :

$P - Q = (5x^2y - 4xy^2 + 5x - 3) - (xyz - 4x^2y + xy^2 + 5x - \frac{1}{2})$

$- 5x^2y - 4xy^2 + 5x - 3 - xyz + 4x^2y - xy^2 - 5x + \frac{1}{2}$ (bỏ dấu ngoặc)

$= (5x^2y + 4x^2y) + (- 4xy^2 - xy^2) + (5x - 5x) - xyz + (-3 + \frac{1}{2})$

(áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp)

$= 9x^2y - 5xy^2 - xyz - 2\frac{1}{2}$ (cộng, trừ các đơn thức đồng dạng)

Ta nói đa thức $9x^2y - 5xy^2 - xyz - 2\frac{1}{2}$ là *hiệu* của hai đa thức P và Q

?2 *Viết hai đa thức rồi tính hiệu của chúng.*

Bài tập

29. Tính :

a) $(x + y) + (x - y)$; b) $(x + y) - (x - y)$.

30. Tính tổng của hai đa thức $P = x^2y + x^3 - xy^2 + 3$ và $Q = x^3 + xy^2 - xy - 6$.

31. Cho hai đa thức :

$M = 3xyz - 3x^2 + 5xy - 1$

$N = 5x^2 + xyz - 5xy + 3 - y$.

Tính $M + N$; $M - N$; $N - M$

32. Tìm đa thức P và đa thức Q, biết :

a) $P + (x^2 - 2y^2) = x^2 - y^2 + 3y^2 - 1$

b) $Q - (5x^2 - xyz) = xy + 2x^2 - 3xyz + 5$.

33. Tính tổng của hai đa thức :

a) $M = x^2y + 0,5xy^3 - 7,5x^3y^2 + x^3$ và $N = 3xy^3 - x^2y + 5,5x^3y^2$.

b) $P = x^5 + xy + 0,3y^2 - x^2y^3 - 2$ và $Q = x^2y^3 + 5 - 1,3y^2$.

Luyện tập

34. Tính tổng của các đa thức :

a) $P = x^2y + xy^2 - 5x^2y^2 + x^3$ và $Q = 3xy^2 - x^2y + x^2y^2$.

b) $M = x^3 + xy + y^2 - x^2y^2 - 2$ và $N = x^2y^2 + 5 - y^2$.

35. Cho hai đa thức :

$M = x^2 - 2xy + y^2$;

$N = y^2 + 2xy + x^2 + 1$.

a) Tính $M + N$; b) Tính $M - N$.

36. Tính giá trị của mỗi đa thức sau :

a) $x^2 + 2xy - 3x^3 + 2y^3 + 3x^3 - y^3$ tại $x = 5$ và $y = 4$.

b) $xy - x^2y^2 + x^4y^4 - x^6y^6 + x^8y^8$ tại $x = -1$ và $y = -1$.

37. Viết một đa thức bậc 3 với hai biến x, y và có ba hạng tử.

38. Cho các đa thức : $A = x^2 - 2y + xy + 1$

$B = x^2 + y - x^2y^2 - 1$.

Tìm đa thức C sao cho :

a) $C = A + B$; b) $C + A = B$.

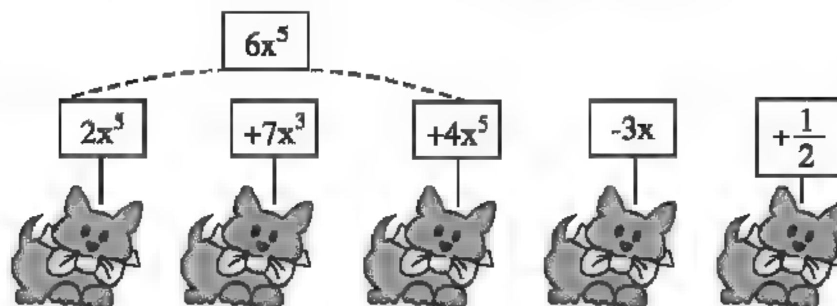
§7. Đa thức một biến

1. Đa thức một biến

• Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

Chẳng hạn : $A = 7y^2 - 3y + \frac{1}{2}$ là đa thức của biến y ;

$B = 2x^5 - 3x + 7x^3 + 4x^5 + \frac{1}{2}$ là đa thức của biến x.



• Mỗi số được coi là một đa thức một biến.

• Để chỉ rõ A là đa thức của biến y, B là đa thức của biến x, ... người ta viết A(y), B(x), ... Khi đó, giá trị của đa thức A(y) tại $y = -1$ được kí hiệu là $A(-1)$, giá trị của đa thức B(x) tại $x = 2$ được kí hiệu là B(2), ...

?1 *Tính* A(5), B(−2), *với* A(y) *và* B(x) *là các đa thức nêu trên.*

?2 *Tìm bậc của các đa thức* A(y), B(x) *nêu trên.*

• Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, đã thu gọn) là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.

2. Sắp xếp một đa thức

Để thuận lợi cho việc tính toán đối với các đa thức một biến, người ta thường sắp xếp các hạng tử của chúng theo luỹ thừa tăng hoặc giảm của biến.

Ví dụ : Đối với đa thức

$$P(x) = 6x + 3 - 6x^2 + x^3 + 2x^4,$$

khi sắp xếp các hạng tử của nó theo luỹ thừa giảm của biến, ta được :

$$P(x) - 2x^4 + x^3 - 6x^2 + 6x + 3,$$

và theo luỹ thừa tăng của biến, ta được :

$$P(x) = 3 + 6x \quad 6x^2 + x^3 + 2x^4.$$

► ***Chú ý :***

Để sắp xếp các hạng tử của một đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.

?3 *Sắp xếp các hạng tử của đa thức* B(x) *(trong mục* 1*) theo luỹ thừa tăng của biến.*

?4 *Hãy sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức sau theo luỹ thừa giảm của biến :*

$$Q(x) = 4x^3 - 2x + 5x^2 - 2x^3 + 1 - 2x^3$$

$$R(x) - -x^2 + 2x^4 + 2x - 3x^4 - 10 + x^4.$$

Nhận xét :

Mọi đa thức bậc 2 của biến x, sau khi đã sắp xếp các hạng tử của chúng theo luỹ thừa giảm của biến, đều có dạng :

$$ax^2 + bx + c$$

trong đó a, b, c là các số cho trước và $a \neq 0$.

► ***Chú ý :***

Ngoài biểu thức ở nhận xét trên, ta còn có thể gặp các biểu thức đại số, mà trong đó có những chữ đại diện cho các số xác định cho trước. Để phân biệt với biến, người ta gọi những chữ như vậy là *hằng số* (còn gọi tắt là *hằng*).

3. Hệ số

Xét đa thức $P(x) = 6x^5 + 7x^3 - 3x + \frac{1}{2}$.

Đó là một đa thức đã thu gọn. Ta nói 6 là hệ số của luỹ thừa bậc 5 ; 7 là hệ số của luỹ thừa bậc 3 ; –3 là hệ số của luỹ thừa bậc 1 ; $\frac{1}{2}$ là hệ số của luỹ thừa bậc 0 (còn gọi là *hệ số tự do*). Vì bậc của đa thức P(x) bằng 5 nên hệ số của luỹ thừa bậc 5 còn gọi là *hệ số cao nhất*.

▶ ***Chú ý :***

Còn có thể viết đa thức P(x) đầy đủ từ luỹ thừa bậc cao nhất đến luỹ thừa bậc 0 là :

$$P(x) = 6x^5 + 0x^4 + 7x^3 + 0x^2 - 3x + \frac{1}{2}.$$

Vì thế, ta nói hệ số của các luỹ thừa bậc 4, bậc 2 của P(x) bằng 0.

Thi "về đích nhanh nhất" : Trong 3 phút, mỗi tổ viên hãy viết các đa thức một biến có bậc bằng số thành viên của tổ mình. Tổ nào viết được nhiều nhất thì coi như tổ đó về đích nhanh nhất.

Bài tập

39. Cho đa thức : $P(x) = 2 + 5x^2 - 3x^3 + 4x^2 - 2x - x^3 + 6x^5$.

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của P(x) theo luỹ thừa giảm của biến.

b) Viết các hệ số khác 0 của đa thức P(x)

40. Cho đa thức $Q(x) = x^2 + 2x^4 + 4x^3 - 5x^6 + 3x^2 - 4x - 1$.

a) Sắp xếp các hạng tử của Q(x) theo luỹ thừa giảm của biến.

b) Chỉ ra các hệ số khác 0 của Q(x).

41. Viết một đa thức một biến có hai hạng tử mà hệ số cao nhất là 5, hệ số tự do là –1.

42. Tính giá trị của đa thức $P(x) = x^2 - 6x + 9$ tại x = 3 và tại x = –3.

43. Trong các số cho ở bên phải mỗi đa thức, số nào là bậc của đa thức đó ?

a) $5x^2 - 2x^3 + x^4 - 3x^2 - 5x^5 + 1$	–5	5	4
b) $15 - 2x$	15	– 2	1
c) $3x^5 + x^3 - 3x^5 + 1$	3	5	1
d) –1.	1	–1	0

§8. Cộng, trừ đa thức một biến

1. Cộng hai đa thức một biến

Ví dụ : Cho hai đa thức :

$$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$$

$$Q(x) = -x^4 + x^3 + 5x + 2.$$

Hãy tính tổng của chúng.

Giải :

Cách 1 :

$$P(x) + Q(x) = (2x^5 + 5x^4 - x^3 + x^2 - x - 1) + (-x^4 + x^3 + 5x + 2)$$

$$= 2x^5 + 5x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 - x^4 + x^3 + 5x + 2$$

$$= 2x^5 + (5x^4 - x^4) + (-x^3 + x^3) + x^2 + (-x + 5x) + (-1 + 2)$$

$$= 2x^5 + 4x^4 + x^2 + 4x + 1$$

Cách 2 : Ta đạt và thực hiện phép cộng như sau (chú ý đạt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột) :

$$\begin{array}{rl} & P(x) = 2x^5 + 5x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 \\ + & \\ & Q(x) = \quad\;\; - x^4 + x^3 \qquad\quad + 5x + 2 \\ \hline & P(x) + Q(x) = 2x^5 + 4x^4 \qquad + x^2 + 4x + 1. \end{array}$$

2. Trừ hai đa thức một biến

Ví dụ : Tính P(x) − Q(x) với P(x) và Q(x) đã cho ở phần 1

Cách 1 : Học sinh tự giải theo cách trừ hai đa thức đã học ở §6.

Cách 2 : Đặt và thực hiện phép trừ như sau :

$$\begin{array}{rl} & P(x) = 2x^5 + 5x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 \\ - & \\ & Q(x) = \qquad - x^4 + x^3 \qquad + 5x + 2 \\ \hline & P(x) - Q(x) = 2x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 - 6x - 3. \end{array}$$

▶ ***Chú ý :***

Để cộng hoặc trừ hai đa thức một biến, ta có thể thực hiện theo một trong hai cách sau :

Cách 1 : Thực hiện theo cách cộng, trừ đa thức đã học ở §6.

Cách 2 : Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo luỹ thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt phép tính theo cột dọc tương tự như cộng, trừ các số (chú ý đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột).

?1 *Cho hai đa thức :* $M(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 + x - 0{,}5$;

$$N(x) = 3x^4 - 5x^2 - x - 2{,}5.$$

Hãy tính $M(x) + N(x)$ *và* $M(x) - N(x)$.

Bài tập

44. Cho hai đa thức : $P(x) = -5x^3 - \dfrac{1}{3} + 8x^4 + x^2$

$$\text{và } Q(x) = x^2 - 5x - 2x^3 + x^4 - \frac{2}{3}.$$

Hãy tính $P(x) + Q(x)$ và $P(x) - Q(x)$

45. Cho đa thức $P(x) = x^4 - 3x^2 + \dfrac{1}{2} - x$.

Tìm các đa thức Q(x), R(x), sao cho :

a) $P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^2 + 1$.

b) $P(x) - R(x) = x^3$.

46. Viết đa thức $P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 2$ dưới dạng :

a) Tổng của hai đa thức một biến.

b) Hiệu của hai đa thức một biến.

Bạn Vinh nêu nhận xét : "Ta có thể viết đa thức đã cho thành tổng của hai đa thức bậc 4". Đúng hay sai ? Vì sao ?

47. Cho các đa thức :

$P(x) = 2x^4 - x - 2x^3 + 1$

$Q(x) = 5x^2 - x^3 + 4x$

$H(x) = -2x^4 + x^2 + 5$.

Tính $P(x) + Q(x) + H(x)$ và $P(x) - Q(x) - H(x)$.

48. Chọn đa thức mà em cho là kết quả đúng :

$(2x^3 - 2x + 1) - (3x^2 + 4x - 1) = ?$

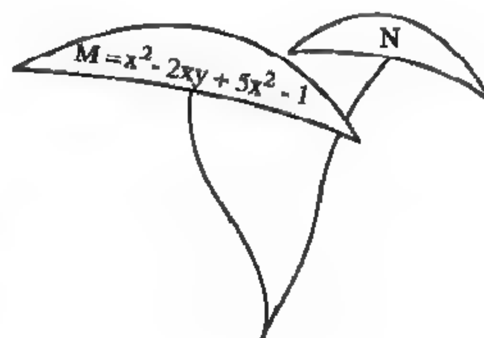
$2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$
$2x^3 - 3x^2 - 6x + 2$
$2x^3 - 3x^2 + 6x + 2$
$2x^3 - 3x^2 - 6x - 2$

Luyện tập

49. Hãy tìm bậc của mỗi đa thức sau :

$M = x^2 - 2xy + 5x^2 - 1$

$N = x^2y^2 - y^2 + 5x^2 - 3x^2y + 5.$



50. Cho các đa thức :

$N = 15y^3 + 5y^2 - y^5 - 5y^2 - 4y^3 - 2y$

$M = y^2 + y^3 - 3y + 1 - y^2 + y^5 - y^3 + 7y^5.$

a) Thu gọn các đa thức trên.

b) Tính N + M và N – M.

51. Cho hai đa thức :

$$P(x) = 3x^2 - 5 + x^4 - 3x^3 - x^6 - 2x^2 - x^3$$

$$Q(x) = x^3 + 2x^5 - x^4 + x^2 - 2x^3 + x - 1$$

a) Sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức theo luỹ thừa tang của biến.

b) Tính P(x) + Q(x) và P(x) – Q(x).

52. Tính giá trị của đa thức $P(x) = x^2 - 2x - 8$ tại : $x = -1$; $x = 0$ và $x = 4$.

53. Cho các đa thức :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 1$$

$$Q(x) = 6 - 2x + 3x^3 + x^4 - 3x^5.$$

Tính P(x) – Q(x) và Q(x) – P(x). Có nhận xét gì về các hệ số của hai đa thức tìm được ?

§9. Nghiệm của đa thức một biến

Có giá trị nào của biến làm cho
đa thức nhận giá trị bằng 0 không ?

1. Nghiệm của đa thức một biến

• *Xét bài toán :* Cho biết công thức đổi từ độ F sang độ C là $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Hỏi nước đóng bang ở bao nhiêu độ F ?

Ta đã biết nước đóng băng ở 0^oC. Khi đó $\frac{5}{9}(F - 32) = 0$. Từ đó $F = 32$. Vậy, nước đóng bang ở 32^oF.

• Xét đa thức $P(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$.

Theo kết quả bài toán trên, ta có $P(32) = 0$. Ta nói $x = 32$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.

2. Ví dụ

a) $x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm của đa thức $P(x) = 2x + 1$ vì $P(-\frac{1}{2}) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$.

b) $x = -1$ và $x = 1$ là các nghiệm của đa thức $Q(x) = x^2 - 1$, vì $Q(-1) = 0$ và $Q(1) = 0$

c) Đa thức $G(x) = x^2 + 1$ không có nghiệm, vì tại $x = a$ bất kì, ta luôn có $G(a) = a^2 + 1 \geq 0 + 1 > 0$.

▶ ***Chú ý :***

– Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm,... hoặc không có nghiệm.

– Người ta đã chứng minh được rằng số nghiệm của một đa thức (khác đa thức không) không vượt quá bậc của nó. Chẳng hạn : đa thức bậc nhất chỉ có một nghiệm, đa thức bậc hai có không quá hai nghiệm, ...

?1 *$x = -2$; $x = 0$ và $x = 2$ có phải là các nghiệm của đa thức $x^3 - 4x$ hay không ? Vì sao ?*

?2 *Trong các số cho sau, với mỗi đa thức, số nào là nghiệm của đa thức ?*

a) $P(x) = 2x + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

b) $Q(x) = x^2 - 2x - 3$	3	1	1

Trò chơi toán học : Cho đa thức $P(x) = x^3 - x$. Giáo viên chuẩn bị một số phiếu (bằng số học sinh của lớp), rồi phát cho mỗi em một phiếu. Mỗi học sinh ghi lên phiếu hai số trong các số -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. Em nào ghi được hai số đều là nghiệm của P(x) thì em đó giành chiến thắng.

Bài tập

54. Kiểm tra xem :

a) $x = \frac{1}{10}$ có phải là nghiệm của đa thức $P(x) = 5x + \frac{1}{2}$ không.

b) Mỗi số $x = 1$; $x = 3$ có phải là một nghiệm của đa thức $Q(x) = x^2 - 4x + 3$ không.

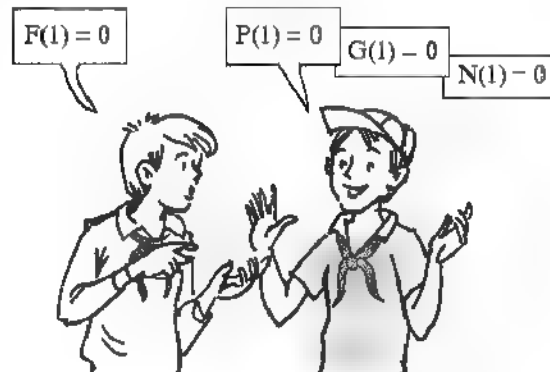
55. a) Tìm nghiệm của đa thức $P(y) = 3y + 6$.

b) Chứng tỏ rằng đa thức sau không có nghiệm : $Q(y) = y^4 + 2$.

56. **Đố** : Bạn Hùng nói : "Ta chỉ có thể viết được một đa thức một biến có một nghiệm bằng 1".

Bạn Sơn nói : "Có thể viết được nhiều đa thức một biến có một nghiệm bằng 1".

Ý kiến của em ?



Ôn tập chương IV

Câu hỏi ôn tập

1. Viết năm đơn thức của hai biến x, y, trong đó x và y có bậc khác nhau.

2. Thế nào là hai đơn thức đồng dạng ? Cho ví dụ.

3. Phát biểu quy tắc cộng, trừ hai đơn thức đồng dạng.

4. Khi nào số a được gọi là nghiệm của đa thức P(x) ?

Bài tập

57. Viết một biểu thức đại số của hai biến x, y thoả mãn từng điều kiện sau :

a) Biểu thức đó là đơn thức.

b) Biểu thức đó là đa thức mà không phải là đơn thức.

58. Tính giá trị mỗi biểu thức sau tại $x = 1$; $y = -1$ và $z = -2$:

a) $2xy(5x^2y + 3x - z)$;   b) $xy^2 + y^2z^3 + z^3x^4$.

59. Hãy điền đơn thức thích hợp vào mỗi ô trống dưới đây :

$5xyz$	·	$5x^2yz$	=	$25x^3y^2z^2$
		$15x^3y^2z$	=	
		$25x^4yz$	=	
		x^2yz	=	
		$\frac{1}{2}xy^3z$	=	

?

60. Có hai vòi nước : vòi thứ nhất chảy vào bể A, vòi thứ hai chảy vào bể B. Bể A đã có sẵn 100 lít nước. Bể B chưa có nước. Mỗi phút vòi thứ nhất chảy được 30 lít, vòi thứ hai chảy được 40 lít.

a) Tính lượng nước có trong mỗi bể sau thời gian 1, 2, 3, 4, 10 phút rồi điền kết quả vào bảng sau (giả thiết bể đủ lớn để chứa nước) :

Thời gian (phút) / Bể	1	2	3	4	10
Bể A	100 + 30				
Bể B	0 + 40				
Cả hai bể	170				

b) Viết biểu thức đại số biểu thị số lít nước trong mỗi bể sau thời gian x phút.

61. Tính tích các đơn thức sau rồi tìm hệ số và bậc của tích tìm được.

a) $\frac{1}{4}xy^3$ và $-2x^2yz^2$

b) $-2x^2yz$ và $-3xy^3z$.

62. Cho hai đa thức :

$$P(x) = x^5 - 3x^2 + 7x^4 - 9x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x$$

$$Q(x) = 5x^4 - x^5 + x^2 - 2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}.$$

a) Sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức trên theo luỹ thừa giảm của biến

b) Tính $P(x) + Q(x)$ và $P(x) - Q(x)$.

c) Chứng tỏ rằng $x = 0$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ nhưng không phải là nghiệm của đa thức $Q(x)$

63. Cho đa thức :

$M(x) = 5x^3 + 2x^4 - x^2 + 3x^2 - x^3 - x^4 + 1 - 4x^3$.

a) Sắp xếp các hạng tử của đa thức trên theo luỹ thừa giảm của biến.

b) Tính $M(1)$ và $M(-1)$

c) Chứng tỏ rằng đa thức trên không có nghiệm.

64. Hãy viết các đơn thức đồng dạng với đơn thức x^2y sao cho tại $x = -1$ và $y = 1$, giá trị của các đơn thức đó là số tự nhiên nhỏ hơn 10.

65. Trong các số cho bên phải mỗi đa thức, số nào là nghiệm của đa thức đó ?

a) $A(x) = 2x - 6$; $\quad -3 \quad 0 \quad 3$

b) $B(x) = 3x + \frac{1}{2}$; $\quad -\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}$

c) $M(x) = x^2 - 3x + 2$; $\quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad 2$

d) $P(x) - x^2 + 5x - 6$; $\quad 6 \quad 1 \quad 1 \quad 6$

e) $Q(x) = x^2 + x$; $\quad -1 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$

Phần HÌNH HỌC

Chương III - **QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC**

§1. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác

Với thước đo góc, có thể so sánh các cạnh của một tam giác hay không ?

Ta đã biết, trong tam giác ABC, $AC = AB \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$. Bây giờ, ta xét trường hợp $AC > AB$ (để biết quan hệ giữa $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$) và trường hợp $\widehat{B} > \widehat{C}$ (để biết quan hệ giữa AC và AB).

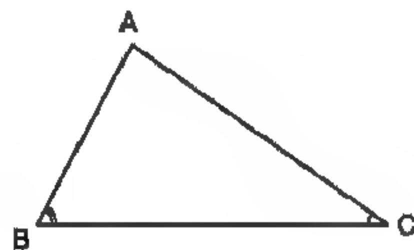
1. Góc đối diện với cạnh lớn hơn

?1 *Vẽ tam giác* ABC *với* $AC > AB$. *Quan sát hình và dự đoán xem ta có trường hợp nào trong các trường hợp sau :*

1) $\widehat{B} = \widehat{C}$

2) $\widehat{B} > \widehat{C}$

3) $\widehat{B} < \widehat{C}$.



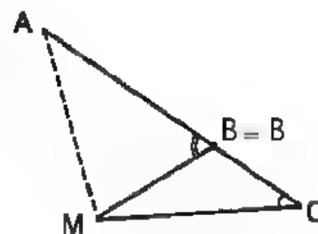
Hình 1

?2 *Gấp hình và quan sát :*

• *Cắt một tam giác* ABC *bằng giấy với* $AC > AB$ *(h. 1).*

• *Gấp tam giác ABC từ đỉnh A sao cho cạnh AB chồng lên cạnh AC để xác định tia phân giác AM của góc BAC, khi đó điểm B trùng với một điểm B' trên cạnh AC (h. 2).*

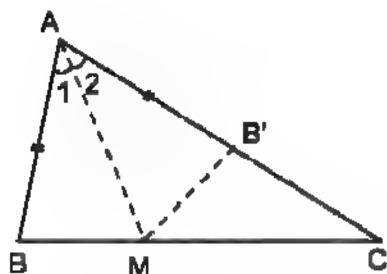
Hãy so sánh góc AB'M và góc C.



Hình 2

Định lí 1

Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.



Hình 3

GT	ΔABC $AC > AB$
KL	$\widehat{B} > \widehat{C}$

Chứng minh :

Trên tia AC, lấy điểm B' sao cho AB' = AB. Do AC > AB nên B' nằm giữa A và C (h. 3).

Kẻ tia phân giác AM của góc A ($M \in BC$).

Hai tam giác ABM và AB'M có :

• AB = AB' (do cách lấy điểm B').

• $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (do AM là tia phân giác của góc A).

• Cạnh AM chung.

Do đó $\Delta ABM = \Delta AB'M$ (c.g.c), suy ra :

$$\widehat{B} = \widehat{AB'M}. \qquad (1)$$

Góc AB'M là một góc ngoài của tam giác B'MC. Theo tính chất góc ngoài của một tam giác, ta có :

$$\widehat{AB'M} > \widehat{C}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B} > \widehat{C}$.

2. Cạnh đối diện với góc lớn hơn

?3 *Vẽ tam giác ABC với $\widehat{B} > \widehat{C}$. Quan sát hình và dự đoán xem ta có trường hợp nào trong các trường hợp sau :*

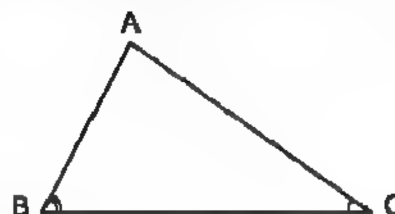
1) AB = AC
2) AB > AC
3) AC > AB.

Người ta đã chứng minh được định lí sau :

Định lí 2

> *Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.*

Cụ thể, trong tam giác ABC (h. 4), nếu $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì AC > AB.



Hình 4

Nhận xét :

1) Định lí 2 là định lí đảo của định lí 1. Từ đó trong tam giác ABC, AC > AB $\Leftrightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$.

2) Trong tam giác tù (hoặc tam giác vuông), góc tù (hoặc góc vuông) là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất.

Bài tập

1. So sánh các góc của tam giác ABC, biết rằng :

AB = 2cm, BC = 4cm, AC = 5cm.

2. So sánh các cạnh của tam giác ABC, biết rằng :

$\widehat{A} = 80^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$.

Luyện tập

3. Cho tam giác ABC với $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$.

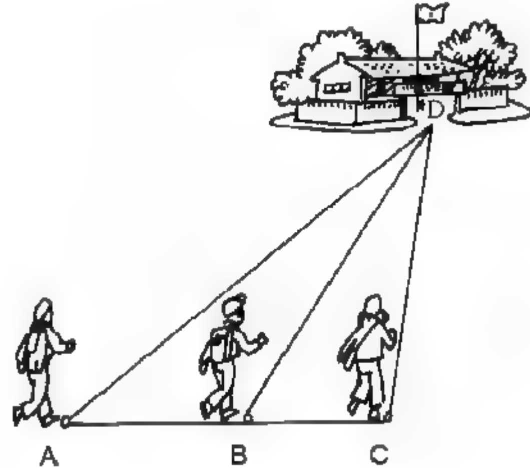
a) Tìm cạnh lớn nhất của tam giác ABC.

b) Tam giác ABC là tam giác gì ?

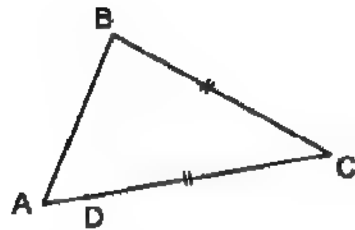
4. Trong một tam giác, đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc gì (nhọn, vuông, tù) ? Tại sao ?

5. Ba bạn Hạnh, Nguyên, Trang đi đến trường theo ba con đường AD, BD và CD (h.5). Biết rằng ba điểm A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng và góc ACD là góc tù.

Hỏi ai đi xa nhất, ai đi gần nhất ? Hãy giải thích



Hình 5



Hình 6

6. Xem hình 6, có hai đoạn thẳng bằng nhau BC và DC. Hỏi rằng kết luận nào trong các kết luận sau là đúng ? Tại sao ?

a) $\widehat{A} = \widehat{B}$

b) $\widehat{A} > \widehat{B}$

c) $\widehat{A} < \widehat{B}$.

7. Một cách chứng minh khác của định lí 1 :

Cho tam giác ABC với AC > AB. Trên tia AC, lấy điểm B' sao cho AB' = AB.

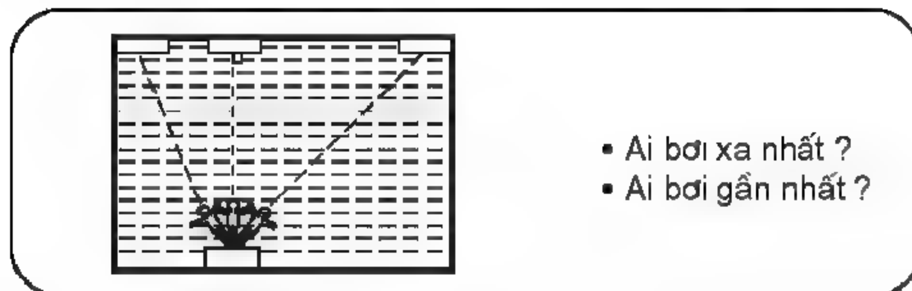
a) Hãy so sánh góc ABC với góc ABB'.

b) Hãy so sánh góc ABB' với góc AB'B.

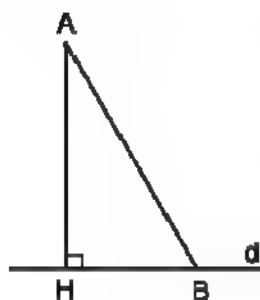
c) Hãy so sánh góc AB'B với góc ACB.

Từ đó suy ra $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$.

§2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu



1. Khái niệm đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên



Hình 7

Từ điểm A không nằm trên đường thẳng d, kẻ một đường thẳng vuông góc với d tại H. Trên d lấy điểm B không trùng với điểm H (h. 7). Khi đó :

• Đoạn thẳng AH gọi là *đoạn vuông góc* hay *đường vuông góc* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d ; điểm H gọi là *chân* của đường vuông góc hay *hình chiếu* của điểm A trên đường thẳng d.

• Đoạn thẳng AB gọi là một *đường xiên* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d.

• Đoạn thẳng HB gọi là *hình chiếu* của đường xiên AB trên đường thẳng d.

?1 *Cho điểm* A *không thuộc đường thẳng* d *(h. 8). Hãy dùng êke để vẽ và tìm hình chiếu của điểm* A *trên* d. *Vẽ một đường xiên từ* A *đến* d, *tìm hình chiếu của đường xiên này trên* d.

• A



Hình 8

2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

?2 *Từ một điểm* A *không nằm trên đường thẳng* d, *ta có thể kẻ được bao nhiêu đường vuông góc và bao nhiêu đường xiên đến đường thẳng* d ?

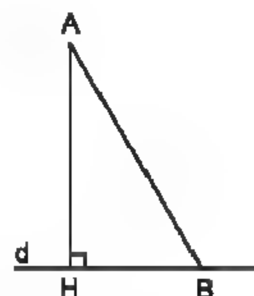
So sánh đường vuông góc và các đường xiên, ta có định lí sau :

Định lí 1

Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Cụ thể, từ một điểm A không nằm trên d, kẻ đường vuông góc AH và một đường xiên AB tuỳ ý đến đường thẳng d thì AH < AB (h. 9).

GT	$A \notin d$ AH là đường vuông góc AB là đường xiên
KL	AH < AB



Hình 9

Chứng minh :

Xét tam giác AHB vuông tại H. Theo nhận xét về cạnh lớn nhất trong tam giác vuông, ta có AH < AB

• Độ dài đường vuông góc AH gọi là *khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng* d.

?3 *Hãy dùng định lí Py-ta-go để so sánh đường vuông góc* AH *và đường xiên* AB *kẻ từ điểm* A *đến đường thẳng* d.

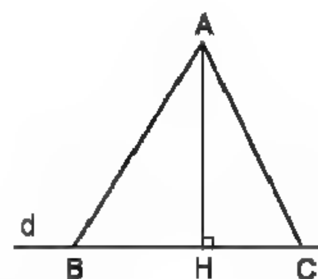
3. Các đường xiên và hình chiếu của chúng

?4 *Cho hình 10. Hãy sử dụng định lí Py-ta-go để suy ra rằng :*

a) Nếu HB > HC *thì* AB > AC ;

b) Nếu AB > AC *thì* HB > HC ;

c) Nếu HB = HC *thì* AB = AC, *và ngược lại, nếu* AB = AC *thì* HB = HC.



Hình 10

Lời giải của **?4** là chứng minh của định lí sau :

Định lí 2

> *Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó :*
>
> *a) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn ;*
>
> *b) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn ;*
>
> *c) Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.*

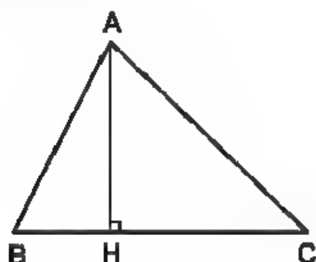
Bài tập

8. Cho hình 11. Biết rằng AB < AC. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng ? Tại sao ?

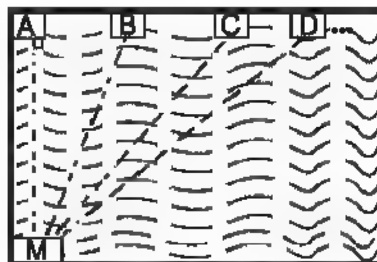
a) HB = HC ;

b) HB > HC ;

c) HB < HC.



Hình 11



Hình 12

9. Để tập bơi nâng dần khoảng cách, hàng ngày bạn Nam xuất phát từ M, ngày thứ nhất bạn bơi đến A, ngày thứ hai bạn bơi đến B, ngày thứ ba bạn bơi đến C,... (h. 12).

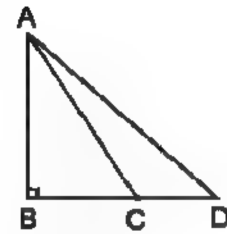
Hỏi rằng bạn Nam tập bơi như thế có đúng mục đích đề ra hay không (ngày hôm sau có bơi được xa hơn ngày hôm trước hay không) ? Vì sao ?

Luyện tập

10. Chứng minh rằng trong một tam giác cân, độ dài đoạn thẳng nối đỉnh đối diện với đáy và một điểm bất kì của cạnh đáy nhỏ hơn hoặc bằng độ dài của cạnh bên.

11. Một cách chứng minh khác của định lí 2 :

Cho hình 13. Dùng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác để chứng minh rằng :



Hình 13

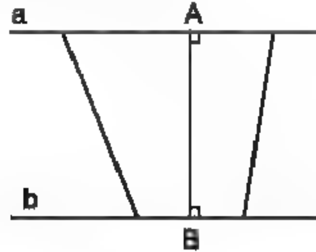
Nếu BC < BD thì AC < AD.

Hướng dẫn :

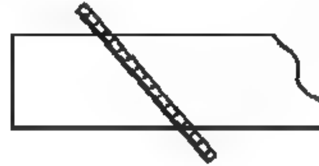
a) Góc ACD là góc gì ? Tại sao ?

b) Trong tam giác ACD, cạnh nào lớn nhất, tại sao ?

12. Cho hình 14. Ta gọi độ dài đoạn thẳng AB là *khoảng cách giữa hai đường thẳng song song* a *và* b.



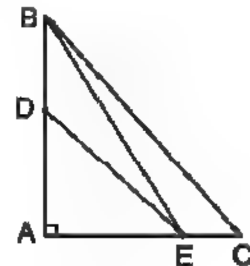
Hình 14


Hình 15

Một tấm gỗ xẻ có hai cạnh song song. Chiều rộng của tấm gỗ là khoảng cách giữa hai cạnh đó.

Muốn đo chiều rộng của tấm gỗ, ta phải đặt thước như thế nào ? Tại sao ? Cách đặt thước như trong hình 15 có đúng không ?

13. Cho hình 16. Hãy chứng minh rằng :



Hình 16

a) BE < BC ;

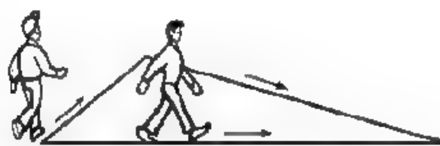
b) DE < BC.

14. **Đố** : Vẽ tam giác PQR có PQ = PR = 5cm, QR = 6cm.

Lấy điểm M trên đường thẳng QR sao cho PM = 4,5cm. Có mấy điểm M như vậy ?

Điểm M có nằm trên cạnh QR hay không ? Tại sao ?

§3. Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức tam giác



Đi theo đường thẳng ngắn hơn đi theo đường gấp khúc !

1. Bất đẳng thức tam giác

?1 *Hãy thử vẽ tam giác với các cạnh có độ dài* 1cm, 2cm, 4cm.

Em có vẽ được không ?

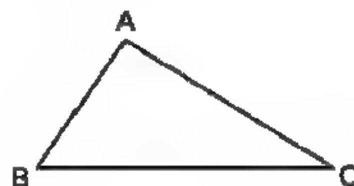
Không phải ba độ dài nào cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác. Ta có định lí sau :

Định lí

> *Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.*

Cho tam giác ABC (h. 17), ta có các bất đẳng thức sau :

- AB + AC > BC
- AB + BC > AC
- AC + BC > AB.



Hình 17

?2 *Dựa vào hình 17, hãy viết giả thiết, kết luận của định lí.*

Chứng minh :

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đầu tiên, hai bất đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

Trên tia đối của tia AB, lấy điểm D sao cho AD = AC (h. 18). Trong tam giác BCD, ta sẽ so sánh BD với BC.

Do tia CA nằm giữa hai tia CB và CD nên

$$\widehat{BCD} > \widehat{ACD}. \qquad (1)$$

Mặt khác, theo cách dựng, tam giác ACD cân tại A nên

$$\widehat{ACD} = \widehat{ADC} = \widehat{BDC}. \qquad (2)$$

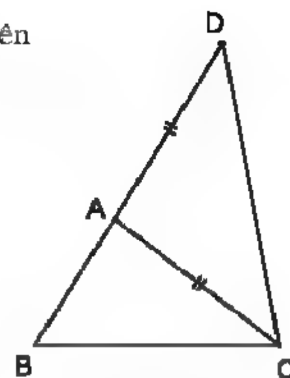
Từ (1) và (2) suy ra :

$$\widehat{BCD} > \widehat{BDC}. \qquad (3)$$

Trong tam giác BCD, từ (3) suy ra :

$$AB + AC = BD > BC$$

(theo định lí về quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác).



Hình 18

Các bất đẳng thức trong kết luận của định lí được gọi là các *bất đẳng thức tam giác*.

2. Hệ quả của bất đẳng thức tam giác

Từ các bất đẳng thức tam giác, ta suy ra :

$AB > AC - BC$; $AC > AB - BC$; $BC > AB - AC$;

$AB > BC - AC$; $AC > BC - AB$; $BC > AC - AB$.

Như vậy, từ định lí trên ta có hệ quả sau :

Hệ quả

Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

Nhận xét :

Nếu xét đồng thời cả tổng và hiệu độ dài hai cạnh của một tam giác thì quan hệ giữa các cạnh của nó còn được phát biểu như sau :

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Chẳng hạn, trong tam giác ABC, với cạnh BC ta có :

$$AB - AC < BC < AB + AC.$$

?3 *Em hãy giải thích vì sao không có tam giác với ba cạnh có độ dài* 1cm, 2cm, 4cm (xem **?1**).

Lưu ý : Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thoả mãn bất đẳng thức tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại, hoặc so sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại.

Bài tập

15. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây không thể là ba cạnh của một tam giác. Trong những trường hợp còn lại, hãy thử dựng tam giác có độ dài ba cạnh như thế :

a) 2cm ; 3cm ; 6cm.

b) 2cm ; 4cm ; 6cm.

c) 3cm ; 4cm ; 6cm.

16. Cho tam giác ABC với hai cạnh BC = 1cm, AC = 7cm

Hãy tìm độ dài cạnh AB, biết rằng độ dài này là một số nguyên (cm). Tam giác ABC là tam giác gì ?

17. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC

a) So sánh MA với MI + IA, từ đó chứng minh MA + MB < IB + IA.

b) So sánh IB với IC + CB, từ đó chứng minh IB + IA < CA + CB.

c) Chứng minh bất đẳng thức MA + MB < CA + CB.

Luyện tập

18. Cho các bộ ba đoạn thẳng có độ dài như sau :

a) 2cm ; 3cm ; 4cm

b) 1cm ; 2cm ; 3,5cm

c) 2,2cm ; 2cm ; 4,2cm.

Hãy vẽ các tam giác có độ dài ba cạnh lần lượt là một trong các bộ ba ở trên (nếu vẽ được). Trong trường hợp không vẽ được, hãy giải thích.

19. Tìm chu vi của một tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó là 3,9cm và 7,9cm.

20. Một cách chứng minh khác của bất đẳng thức tam giác :

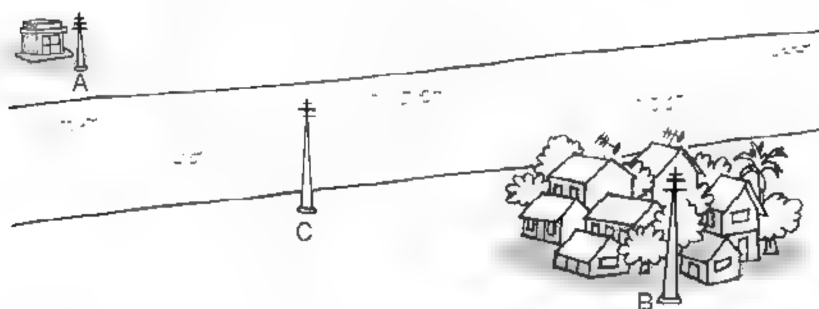
Cho tam giác ABC. Giả sử BC là cạnh lớn nhất. Kẻ đường vuông góc AH đến đường thẳng BC ($H \in BC$).

a) Dùng nhận xét về cạnh lớn nhất trong tam giác vuông ở §1 để chứng minh $AB + AC > BC$.

b) Từ giả thiết về cạnh BC, hãy suy ra hai bất đẳng thức tam giác còn lại.

21. Một trạm biến áp và một khu dân cư được xây dựng cách xa hai bờ sông tại hai địa điểm A và B (h. 19).

Hãy tìm trên bờ sông gần khu dân cư một địa điểm C để dựng một cột mắc dây đưa điện từ trạm biến áp về cho khu dân cư sao cho độ dài đường dây dẫn là ngắn nhất.

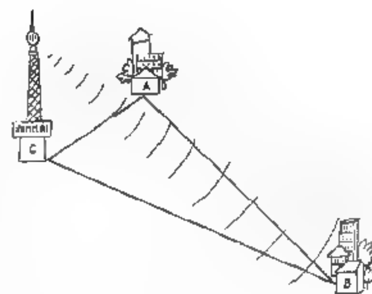


Hình 19

22. Ba thành phố A, B, C là ba đỉnh của một tam giác ; biết rằng : AC − 30km, AB − 90km (h. 20).

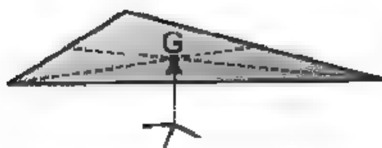
a) Nếu đặt ở C máy phát sóng truyền thanh có bán kính hoạt động bằng 60km thì thành phố B có nhận được tín hiệu không ? Vì sao ?

b) Cũng câu hỏi như vậy với máy phát sóng có bán kính hoạt động bằng 120km ?



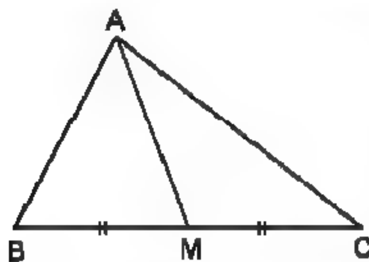
Hình 20

§4. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác



G là điểm nào trong tam giác thì miếng bìa hình tam giác nằm thăng bằng trên giá nhọn ?

1. Đường trung tuyến của tam giác



Hình 21

Trong hình 21 :

- Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của tam giác ABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là *đường trung tuyến* (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC) của tam giác ABC. Đôi khi, đường thẳng AM cũng gọi là đường *trung tuyến* của tam giác ABC.
- Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

?1 *Hãy vẽ một tam giác và tất cả các đường trung tuyến của nó.*

2. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

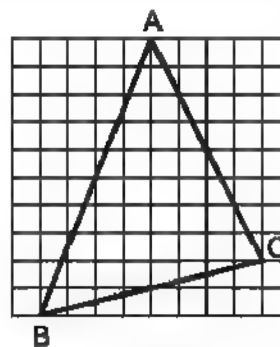
a) Thực hành

Thực hành 1 : Cắt một tam giác bằng giấy. Gấp lại để xác định trung điểm một cạnh của nó. Kẻ đoạn thẳng nối trung điểm này với đỉnh đối diện. Bằng cách tương tự, hãy vẽ tiếp hai đường trung tuyến còn lại.

?2 *Quan sát tam giác vừa cắt (trên đó đã vẽ ba đường trung tuyến). Cho biết : Ba đường trung tuyến của tam giác này có cùng đi qua một điểm hay không ?*

Thực hành 2 :

- Trên mảnh giấy kẻ ô vuông mỗi chiều 10 ô, em hãy đếm dòng, đánh dấu các đỉnh A, B, C rồi vẽ tam giác ABC như hình 22.
- Vẽ hai đường trung tuyến BE và CF. Hai trung tuyến này cắt nhau tại G. Tia AG cắt cạnh BC tại D.



Hình 22

?3 *Dựa vào hình 22, hãy cho biết :*

- AD *có là đường trung tuyến của tam giác* ABC *hay không ?*
- *Các tỉ số* $\frac{AG}{AD}, \frac{BG}{BE}, \frac{CG}{CF}$ *bằng bao nhiêu ?*

b) Tính chất

Người ta đã chứng minh được định lí sau về tính chất ba đường trung tuyến của một tam giác.

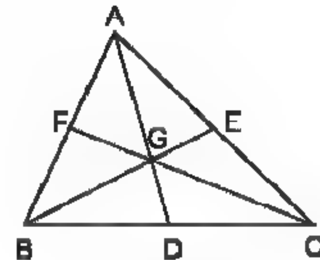
Định lí

> *Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng* $\frac{2}{3}$ *độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.*

Cụ thể, trong tam giác ABC (h. 23), các đường trung tuyến AD, BE, CF cùng đi qua điểm G (hay còn gọi là *đồng quy* tại điểm G) và ta có :

$$\frac{GA}{DA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{FC} = \frac{2}{3}.$$

Điểm G gọi là *trọng tâm* của tam giác ABC.



Hình 23

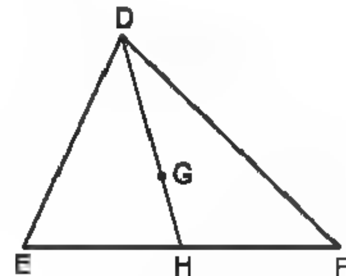
Bài tập

23. Cho G là trọng tâm của tam giác DEF với đường trung tuyến DH (h. 24)

Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng ?

$$\frac{DG}{DH} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{DG}{GH} = 3;$$

$$\frac{GH}{DH} = \frac{1}{3}; \qquad \frac{GH}{DG} = \frac{2}{3}.$$

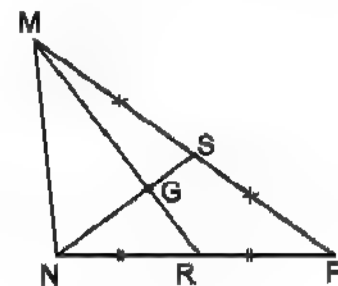


Hình 24

24. Cho hình 25. Hãy điền số thích hợp vào chỗ trống trong các đẳng thức sau :

a) MG = ... MR ; GR = ... MR ; GR = ... MG

b) NS = ... NG ; NS = ... GS ; NG = ... GS.



Hình 25

25. Biết rằng : Trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền. Hãy giải bài toán sau :

Cho tam giác vuông ABC có hai cạnh góc vuông AB = 3cm, AC = 4cm. Tính khoảng cách từ đỉnh A tới trọng tâm G của tam giác ABC.

Luyện tập

26. Chứng minh định lí : *Trong một tam giác cân, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.*

27. Hãy chứng minh định lí đảo của định lí trên : *Nếu tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó cân.*

28. Cho tam giác DEF cân tại D với đường trung tuyến DI.

a) Chứng minh $\Delta DEI = \Delta DFI$.

b) Cho biết số đo của hai góc DIE và DIF.

c) Biết DE = DF = 13cm, EF = 10cm, hãy tính độ dài đường trung tuyến DI.

29. Cho G là trọng tâm của tam giác đều ABC. Chứng minh rằng :

$$GA = GB = GC.$$

Hướng dẫn : Áp dụng định lí ở bài tập 26.

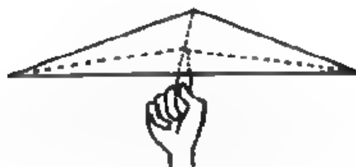
30. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Trên tia AG lấy điểm G' sao cho G là trung điểm của AG'.

a) So sánh các cạnh của tam giác BGG' với các đường trung tuyến của tam giác ABC.

b) So sánh các đường trung tuyến của tam giác BGG' với các cạnh của tam giác ABC.



Có thể em chưa biết



Hình 26

• Nếu nối ba đỉnh của một tam giác với trọng tâm của nó (h. 26) thì ta được ba tam giác nhỏ có diện tích bằng nhau.

• Đặt một miếng bìa hình tam giác lên giá nhọn, điểm đặt làm cho miếng bìa đó nằm thăng bằng chính là trọng tâm của tam giác.

Hãy thử xem !

§5. Tính chất tia phân giác của một góc

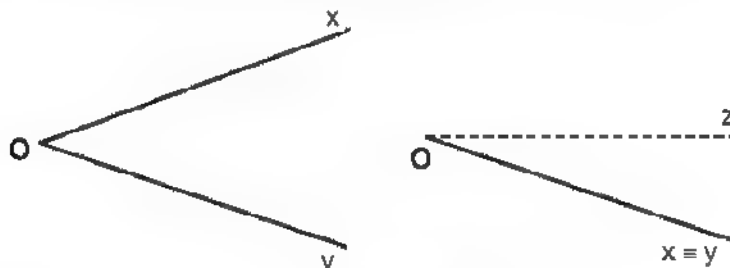

Thước hai lề (thước có hai cạnh song song)

• Dùng thước hai lề có thể vẽ được tia phân giác của một góc không ?

1. Định lí về tính chất các điểm thuộc tia phân giác

a) Thực hành

Cắt một góc xOy bằng giấy, gấp góc đó sao cho cạnh Ox trùng với cạnh Oy để xác định tia phân giác Oz của nó (h. 27).



Hình 27

Từ một điểm M tuỳ ý trên tia Oz, ta gấp MH vuông góc với hai cạnh trùng nhau Ox, Oy (h. 28). Độ dài của nếp gấp MH chính là khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh Ox, Oy của góc xOy.



Hình 28

?1 *Dựa vào cách gấp hình, hãy so sánh các khoảng cách từ điểm* M *đến hai cạnh* Ox, Oy.

Ta có định lí sau :

b) Định lí 1 (định lí thuận)

Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

?2 *Dựa vào hình 29, hãy viết giả thiết và kết luận của định lí 1.*

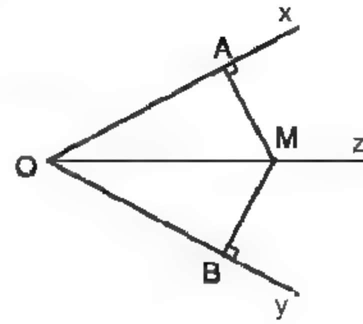
Chứng minh : (h. 29).

Hai tam giác vuông MOA và MOB có :

– Cạnh huyền OM chung,

– $\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$ (theo giả thiết).

Do đó $\Delta MOA = \Delta MOB$ (cạnh huyền, góc nhọn), suy ra MA = MB.

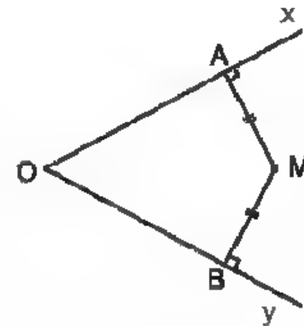


Hình 29

2. Định lí đảo

Xét bài toán sau :

Cho một điểm M nằm bên trong góc xOy sao cho khoảng cách từ M đến hai cạnh Ox, Oy bằng nhau (h. 30). Hỏi điểm M có nằm trên tia phân giác (hay OM có là tia phân giác) của góc xOy hay không ?



Hình 30

Ta có định lí sau :

Định lí 2 (định lí đảo)

> *Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.*

?3 *Dựa vào hình 30, hãy viết giả thiết và kết luận của định lí 2.*

Hướng dẫn chứng minh : (h. 30).

– Kẻ tia OM.

– Chứng minh hai tam giác vuông MOA và MOB bằng nhau.

Từ đó suy ra $\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$ hay OM là tia phân giác của góc xOy.

Nhận xét : Từ định lí 1 và định lí 2, ta có : *Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó*

Bài tập

31. Hình 31 cho biết cách vẽ tia phân giác của góc xOy bằng thước hai lề :

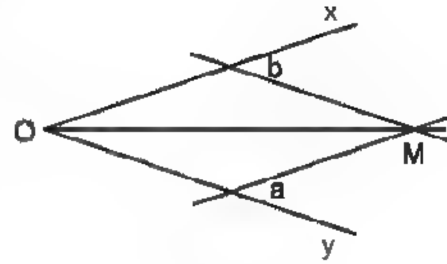
– Áp một lề của thước vào cạnh Ox, kẻ đường thẳng a theo lề kia.

– Làm tương tự với cạnh Oy, ta kẻ được đường thẳng b.

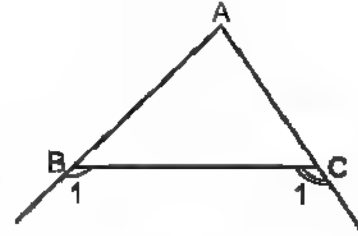
– Gọi M là giao điểm của a và b, ta có OM là tia phân giác của góc xOy.

Hãy chứng minh tia OM được vẽ như vậy đúng là tia phân giác của góc xOy.

(*Gợi ý :* Dựa vào bài tập 12 chứng minh các khoảng cách từ M đến Ox và đến Oy bằng nhau (do cùng bằng khoảng cách hai lề của chiếc thước) rồi áp dụng định lí 2).



Hình 31



Hình 32

32. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng giao điểm của hai tia phân giác của hai góc ngoài B_1 và C_1 (h. 32) nằm trên tia phân giác của góc A

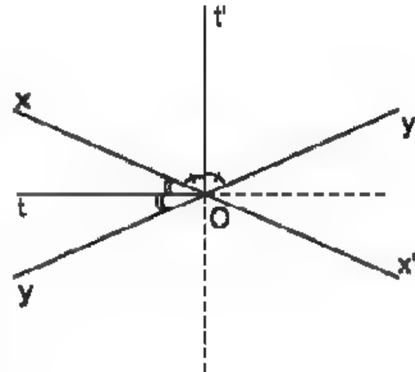
Luyện tập

33. Cho hai đường thẳng xx', yy' cắt nhau tại O (h. 33)

a) Chứng minh hai tia phân giác Ot, Ot' của một cặp góc kề bù tạo thành một góc vuông.

b) Chứng minh rằng : Nếu M thuộc đường thẳng Ot hoặc thuộc đường thẳng Ot' thì M cách đều hai đường thẳng xx' và yy'.

c) Chứng minh rằng : Nếu điểm M cách đều hai đường thẳng xx', yy' thì M thuộc đường thẳng Ot hoặc thuộc đường thẳng Ot'.



Hình 33

d) Khi M ≡ O thì các khoảng cách từ M đến xx' và yy' bằng bao nhiêu ?

e) Em có nhận xét gì về tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng cắt nhau xx', yy' ?

34. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy hai điểm A và B, trên tia Oy lấy hai điểm C và D sao cho OA = OC, OB = OD. Gọi I là giao điểm của hai đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng :

a) BC = AD ;

b) IA = IC, IB = ID ;

c) Tia OI là tia phân giác của góc xOy.

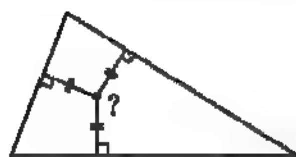
35. Có mảnh sắt phẳng hình dạng một góc (h. 34) và một chiếc thước thẳng có chia khoảng. Làm thế nào để vẽ được tia phân giác của góc này ?

Gợi ý : Áp dụng bài tập 34.



Hình 34

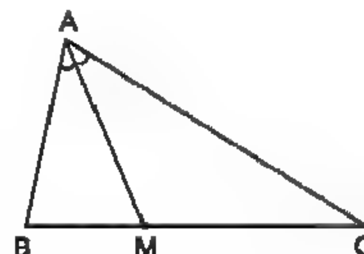
§6. Tính chất ba đường phân giác của tam giác



Điểm nào trong tam giác cách đều ba cạnh của nó ?

1. Đường phân giác của tam giác

Trong tam giác ABC, tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm M (h. 35), khi đó đoạn thẳng AM được gọi là *đường phân giác* (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC. Đôi khi ta cũng gọi đường thẳng AM là đường phân giác của tam giác ABC.



Hình 35

Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

Ta có tính chất :

Trong một tam giác cân, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đối diện với đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy (h.36).

(Học sinh tự chứng minh).



Hình 36

2. Tính chất ba đường phân giác của tam giác

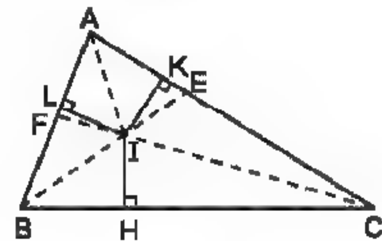
?1 *Cắt một tam giác bằng giấy. Gấp hình xác định ba đường phân giác của nó. Trải tam giác ra, quan sát và cho biết : Ba nếp gấp có cùng đi qua một điểm không.*

Ta có định lí sau :

Định lí

Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Ta có thể chứng minh định lí theo cách sau : Gọi I là giao điểm của hai đường phân giác xuất phát từ đỉnh B và đỉnh C của tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh AI là tia phân giác của góc A và I cách đều ba cạnh của tam giác ABC (h. 37).



Hình 37

?2 *Dựa vào hình 37, hãy viết giả thiết và kết luận của định lí.*

Chứng minh :

• Vì I nằm trên tia phân giác BE của góc B nên theo định lí 1 về tính chất của tia phân giác, ta có

$$IL = IH. \qquad (1)$$

• Tương tự, ta có

$$IK – IH. \qquad (2)$$

• Từ (1) và (2) suy ra IK = IL (= IH), hay I cách đều hai cạnh AB, AC của góc A. Do đó I nằm trên tia phân giác của góc A (theo định lí 2 về tính chất của tia phân giác), hay AI là đường phân giác xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC.

Tóm lại, ba đường phân giác của tam giác ABC cùng đi qua điểm I và điểm này cách đều ba cạnh của tam giác, nghĩa là : IH = IK = IL.

Bài tập

36. Cho tam giác DEF, điểm I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của nó. Chứng minh I là điểm chung của ba đường phân giác của tam giác DEF.

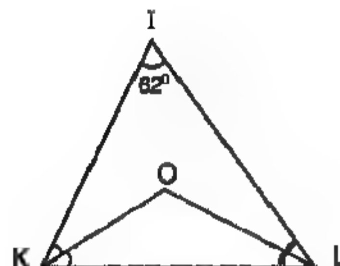
37. Nêu cách vẽ điểm K ở trong tam giác MNP mà các khoảng cách từ K đến ba cạnh của tam giác đó bằng nhau. Vẽ hình minh hoạ.

38. Cho hình 38.

a) Tính góc KOL.

b) Kẻ tia IO, hãy tính góc KIO.

c) Điểm O có cách đều ba cạnh của tam giác IKL không ? Tại sao ?



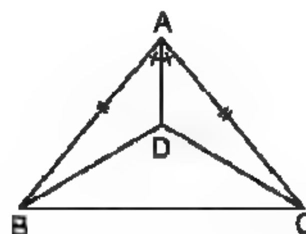
Hình 38

Luyện tập

39. Cho hình 39.

a) Chứng minh ΔABD = ΔACD.

b) So sánh góc DBC và góc DCB.



Hình 39

40. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi G là trọng tâm, I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm A, G, I thẳng hàng.

41. Hỏi trọng tâm của một tam giác đều có cách đều ba cạnh của nó hay không ? Vì sao ?

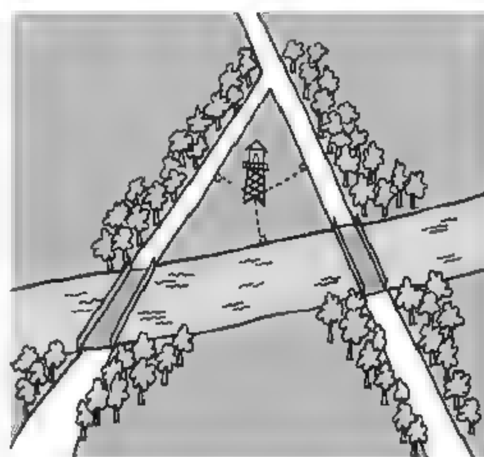
42. Chứng minh định lí : *Nếu tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó là một tam giác cân.*

Gợi ý : Trong ΔABC, nếu AD vừa là đường trung tuyến vừa là đường phân giác thì kéo dài AD một đoạn DA_1 sao cho $DA_1 = AD$.

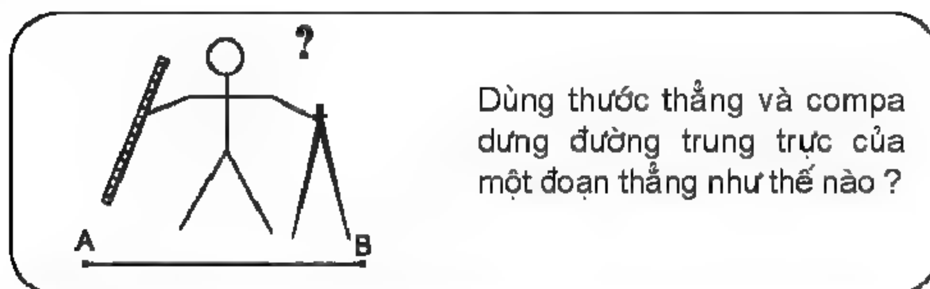
43. **Đố** : Có hai con đường cắt nhau và cùng cắt một con sông tại hai địa điểm khác nhau (h. 40).

Hãy tìm một địa điểm để xây dựng một đài quan sát sao cho các khoảng cách từ đó đến hai con đường và đến bờ sông bằng nhau.

Có tất cả mấy địa điểm như vậy ?

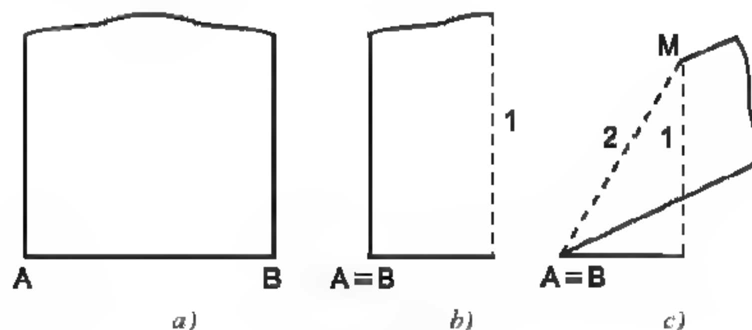

Hình 40

§7. Tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng



1. Định lí về tính chất của các điểm thuộc đường trung trực

a) Thực hành



a) *b)* *c)*

Hình 41

• Cắt một mảnh giấy, trong đó có một mép cắt là đoạn thẳng AB (h. 41a).

• Gấp mảnh giấy sao cho mút A trùng với mút B (h. 41b). Nếp gấp 1 chính là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

• Từ một điểm M tuỳ ý trên nếp gấp 1, gấp đoạn thẳng MA (hay MB) được nếp gấp 2 (h. 41c). Độ dài của nếp gấp 2 là các khoảng cách từ điểm M đến hai điểm A và B. Từ đó ta thấy MA = MB.

Ta có định lí sau :

b) Định lí 1 (định lí thuận)

Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

Cụ thể, nếu điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB thì MA = MB (Học sinh tự chứng minh).

2. Định lí đảo

Xét điểm M cách đều hai mút của đoạn thẳng AB. Hỏi điểm M có nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB hay không ?

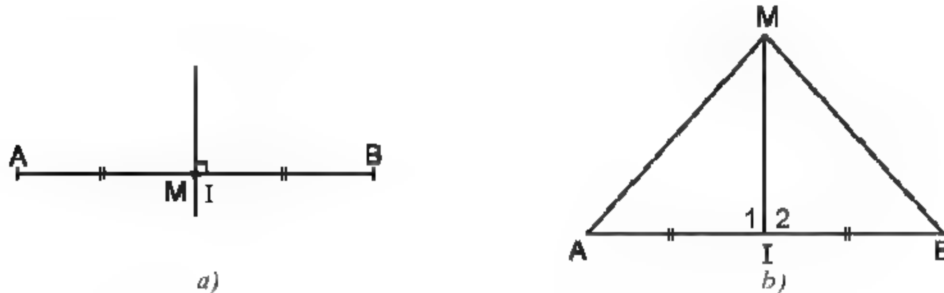
Ta có định lí :

Định lí 2 (định lí đảo)

> *Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.*

Cụ thể, nếu MA = MB thì M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB.

?1 *Hãy viết giả thiết, kết luận của định lí.*



a) *b)*

Hình 42

Chứng minh :

Xét hai trường hợp :

• M ∈ AB (h. 42a) : Vì MA = MB nên M là trung điểm của đoạn thẳng AB, do đó M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

• M ∉ AB (h. 42b) : Kẻ đoạn thẳng nối M với trung điểm I của đoạn thẳng AB.

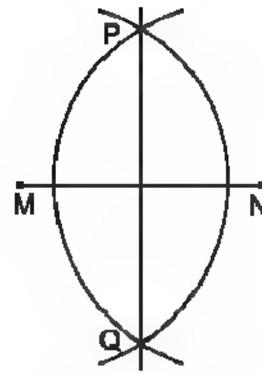
Ta có ΔMAI = ΔMBI (c.c.c), suy ra $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$. Mặt khác $\widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 = 180^\circ$ nên $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2 = 90^\circ$. Vậy MI là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Nhận xét :

Từ định lí thuận và định lí đảo, ta có : *Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.*

3. Ứng dụng

Ta có thể vẽ đường trung trực của đoạn thẳng MN bằng thước thẳng và compa như sau (h. 43) :



Hình 43

- Lấy M làm tâm vẽ cung tròn bán kính lớn hơn $\frac{1}{2}$MN, sau đó lấy N làm tâm vẽ cung tròn có cùng bán kính đó sao cho hai cung tròn này có hai điểm chung, gọi là P và Q.
- Dùng thước vẽ đường thẳng PQ, đó là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

▶ ***Chú ý :***

Khi vẽ hai cung tròn trên, ta phải lấy bán kính lớn hơn $\frac{1}{2}$MN thì hai cung tròn đó mới có hai điểm chung.

– Giao điểm của đường thẳng PQ với đường thẳng MN là trung điểm của đoạn thẳng MN nên cách vẽ trên cũng là cách dựng trung điểm của đoạn thẳng bằng thước và compa.

Bài tập

44. Gọi M là điểm nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB. Cho đoạn thẳng MA có độ dài 5cm. Hỏi độ dài MB bằng bao nhiêu ?

45. Chứng minh đường thẳng PQ được vẽ như trong hình 43 đúng là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

Gợi ý : Sử dụng định lí 2.

46. Cho ba tam giác cân ABC, DBC, EBC có chung đáy BC. Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Luyện tập

47. Cho hai điểm M, N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Chứng minh ΔAMN = ΔBMN.

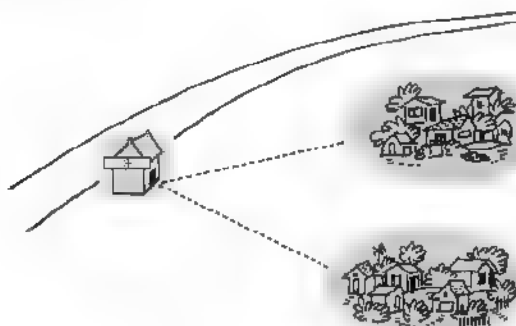
48. Hai điểm M và N cùng nằm trên một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng xy. Lấy điểm L đối xứng với M qua xy. Gọi I là một điểm của xy. Hãy so sánh IM + IN với LN.

49. Hai nhà máy được xây dựng bên cùng một bờ sông tại hai địa điểm A và B (h. 44). Hãy tìm trên bờ sông đó một địa điểm C để xây dựng trạm bơm đưa nước về cho hai nhà máy, sao cho độ dài đường ống dẫn nước là ngắn nhất.



Hình 44

50. Một con đường quốc lộ cách không xa hai điểm dân cư (h. 45). Hãy tìm bên đường đó một địa điểm để xây dựng một trạm y tế sao cho trạm y tế này cách đều hai điểm dân cư.

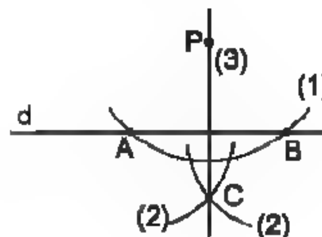


Hình 45

51. Cho đường thẳng d và điểm P không nằm trên d. Hình 46 minh hoạ cho cách dựng đường thẳng đi qua điểm P và vuông góc với đường thẳng d bằng thước và compa như sau :

(1) Vẽ đường tròn tâm P với bán kính thích hợp sao cho nó cắt d tại hai điểm A và B.

(2) Vẽ hai đường tròn với bán kính bằng nhau có tâm tại A và B sao cho chúng cắt nhau. Gọi một giao điểm của chúng là C ($C \neq P$).



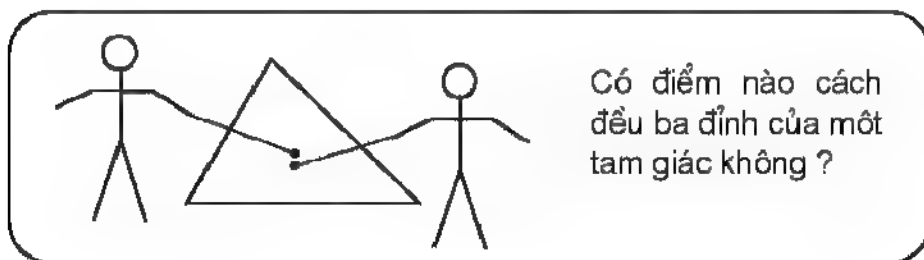
Hình 46

(3) Vẽ đường thẳng PC.

Em hãy chứng minh đường thẳng PC vuông góc với d.

Đố : Tìm thêm một cách dựng nữa (bằng thước và compa).

§8. Tính chất ba đường trung trực của tam giác

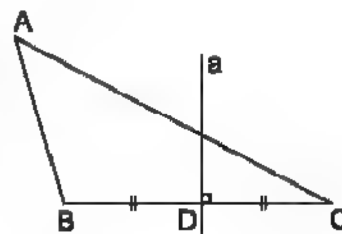


1. Đường trung trực của tam giác

Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.

Trong hình 47, a là đường trung trực ứng với cạnh BC của tam giác ABC.

Mỗi tam giác có ba đường trung trực.



Hình 47

Nhận xét :

Trong tam giác bất kì, đường trung trực của một cạnh không nhất thiết đi qua đỉnh đối diện với cạnh ấy. Tuy nhiên, trong một tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy luôn đi qua đỉnh đối diện với cạnh đó. Ta có tính chất :

Trong một tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh này.

?1 *Em hãy vẽ hình, viết giả thiết, kết luận và chứng minh tính chất trên.*

2. Tính chất ba đường trung trực của tam giác

?2 *Dùng thước và compa, dựng ba đường trung trực của một tam giác (xem mục 3, §7). Em có nhận thấy ba đường này cùng đi qua một điểm không ?*

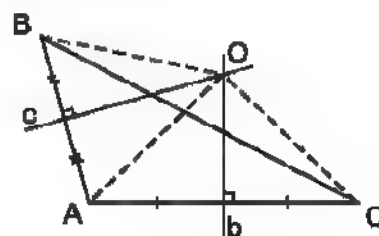
Định lí sau sẽ cho em biết mình vẽ hình có chính xác không.

Định lí

> *Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.*

Tương tự như chứng minh định lí về tính chất ba đường phân giác của tam giác trong §6, ta có thể chứng minh định lí này theo cách sau : Gọi O là giao điểm của hai đường trung trực ứng với cạnh AB và AC của tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh O cũng nằm trên đường trung trực ứng với cạnh BC của tam giác đó và OA = OB = OC (h. 48).

GT	ΔABC b là đường trung trực của AC c là đường trung trực của AB b và c cắt nhau tại O
KL	O nằm trên đường trung trực của BC OA = OB = OC.



Hình 48

Chứng minh :

Vì O nằm trên đường trung trực b của đoạn thẳng AC nên

$$OA = OC. \quad (1)$$

Vì O nằm trên đường trung trực c của đoạn thẳng AB nên

$$OA = OB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$OB = OC\ (= OA),$$

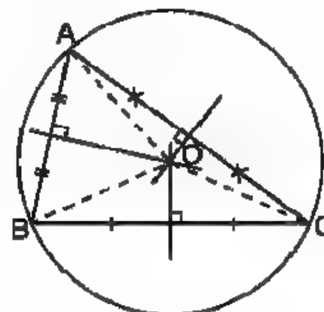
do đó điểm O nằm trên đường trung trực của cạnh BC (theo tính chất đường trung trực).

Vậy ba đường trung trực của tam giác ABC cùng đi qua điểm O và ta có :

$$OA = OB = OC.$$

 ***Chú ý :***

Vì giao điểm O của ba đường trung trực của tam giác ABC cách đều ba đỉnh của tam giác đó nên có một đường tròn tâm O đi qua ba đỉnh A, B, C. Ta gọi đường tròn đó là *đường tròn ngoại tiếp* tam giác ABC (h. 49).

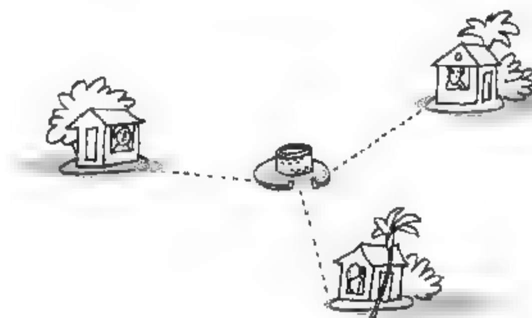


Hình 49

Bài tập

52. Chứng minh định lí : *Nếu tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực ứng với cùng một cạnh thì tam giác đó là một tam giác cân.*

53. Ba gia đình quyết định đào chung một cái giếng (h. 50). Phải chọn vị trí của giếng ở đâu để các khoảng cách từ giếng đến các nhà bằng nhau ?



Hình 50

Luyện tập

54. Vẽ đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC trong các trường hợp sau :

a) $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ đều nhọn.

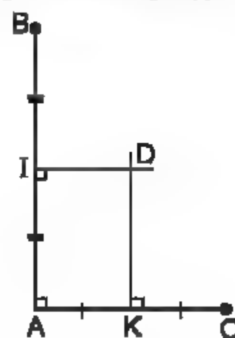
b) $\widehat{A} = 90^\circ$.

c) $\widehat{A} > 90^\circ$.

55. Cho hình 51.

Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.

Gợi ý : Chứng minh $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

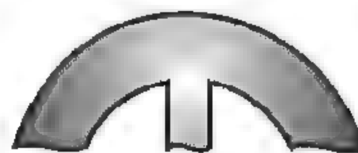


Hình 51

56. Sử dụng bài 55 để chứng minh rằng : Điểm cách đều ba đỉnh của một tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền của tam giác đó.

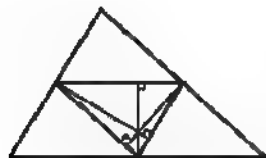
Từ đó hãy tính độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông theo độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông.

57. Có một chi tiết máy (mà đường viền ngoài là đường tròn) bị gãy (h. 52). Làm thế nào để xác định được bán kính của đường viền này ?



Hình 52

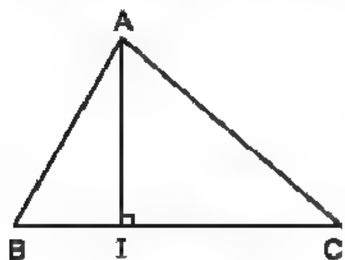
§9. Tính chất ba đường cao của tam giác



Điều lí thú :

Ba đường cao của tam giác này lại là ba đường trung trực của tam giác khác !

1. Đường cao của tam giác



Hình 53

Trong một tam giác, đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là *đường cao* của tam giác đó.

Trong hình 53, đoạn thẳng AI là một đường cao của tam giác ABC. Ta còn nói AI là đường cao xuất phát từ đỉnh A (của tam giác ABC).

Đôi khi ta cũng gọi đường thẳng AI là một đường cao của tam giác ABC.

Mỗi tam giác có ba đường cao.

2. Tính chất ba đường cao của tam giác

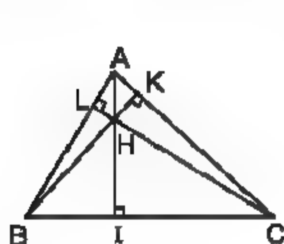
?1 *Dùng êke vẽ ba đường cao của tam giác* ABC.

Hãy cho biết ba đường cao của tam giác đó có cùng đi qua một điểm hay không.

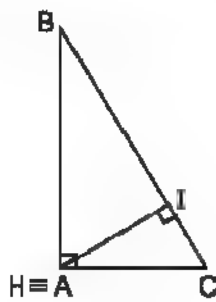
Ta thừa nhận điều dưới đây :

Định lí

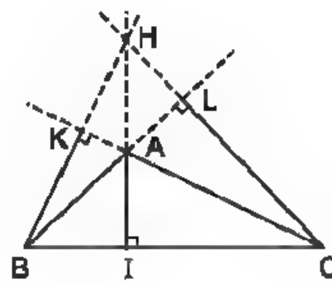
Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm.



a)



b)



c)

Hình 54

Cụ thể (xem các hình 54a, b, c) : Ba đường cao AI, BK, CL cùng đi qua (đồng quy tại) điểm H.

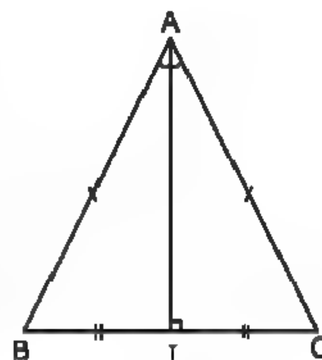
Điểm H gọi là *trực tâm* của tam giác ABC.

3. Về các đường cao, trung tuyến, trung trực, phân giác của tam giác cân

Từ các điều đã biết trong §6 và §8, ta có tính chất sau :

Tính chất của tam giác cân

Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó (h. 55).



Hình 55

Ngược lại với tính chất trên, ta có :

Nhận xét :

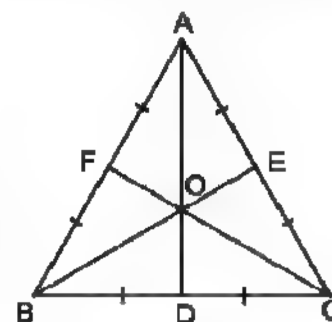
Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.

Thật vậy, bài tập 42 cho thấy : "Nếu tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó là một tam giác cân" ; bài tập 52 cho thấy : "Nếu tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực (cùng ứng với một cạnh), thì tam giác đó là một tam giác cân".

?2 *Hãy phát biểu và chứng minh các trường hợp còn lại của nhận xét trên (xem như những bài tập).*

Đặc biệt đối với tam giác đều, từ tính chất trên ta suy ra :

Trong tam giác đều, trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau (h. 56).



Hình 56

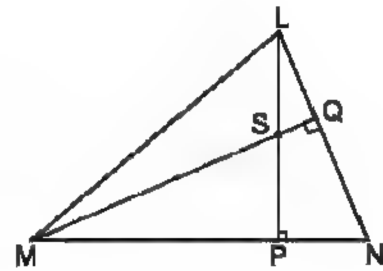
Luyện tập

58. Hãy giải thích tại sao trực tâm của tam giác vuông trùng với đỉnh góc vuông và trực tâm của tam giác tù nằm ở bên ngoài tam giác.

59. Cho hình 57.

a) Chứng minh NS ⊥ LM.

b) Khi $\widehat{LNP} = 50^\circ$, hãy tính góc MSP và góc PSQ.



Hình 57

60. Trên đường thẳng d, lấy ba điểm phân biệt I, J, K (J ở giữa I và K).

Kẻ đường thẳng *l* vuông góc với d tại J. Trên *l* lấy điểm M khác với điểm J. Đường thẳng qua I vuông góc với MK cắt *l* tại N.

Chứng minh rằng KN ⊥ IM.

61. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi H là trực tâm của nó.

a) Hãy chỉ ra các đường cao của tam giác HBC. Từ đó hãy chỉ ra trực tâm của tam giác đó.

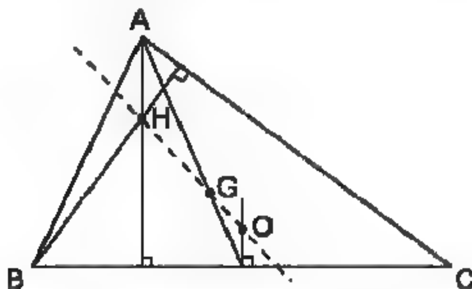
b) Tương tự, hãy lần lượt chỉ ra trực tâm của các tam giác HAB và HAC.

62. Chứng minh rằng một tam giác có hai đường cao (xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân. Từ đó suy ra một tam giác có ba đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

Ôn tập chương III



Có thể em chưa biết





Lê ô na Ơ le

Trong tam giác ABC, nếu gọi O là điểm chung của ba đường trung trực (tâm đường tròn ngoại tiếp), G là điểm chung của ba đường trung tuyến (trọng tâm), H là điểm chung của ba đường cao (trực tâm), thì O, G, H cùng thuộc một đường thẳng (G ở giữa O, H và OH = 3OG). Đường thẳng chứa O, G, H gọi là ***đường thẳng Ơ-le*** của tam giác ABC ; nó được mang tên nhà toán học lỗi lạc Lê-ô-na Ơ-le (1707 - 1783). *Lê-ô-na Ơ-le* sinh ra ở Thuỵ Sĩ, làm việc nhiều năm ở Nga. Số lượng công trình nghiên cứu khoa học của ông ít ai sánh kịp

Bảng tổng kết các kiến thức cần nhớ

	$\hat{B} > \hat{C} \Leftrightarrow AC > AB$ $\hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow AC = AB$
	$A \notin d$, $B \in d$, $AH \perp d$. Khi đó $AB > AH$, hoặc $AB = AH$ (điều này xảy ra $\Leftrightarrow B \equiv H$).
	$A \notin d$, $B \in d$, $C \in d$, $AH \perp d$. Khi đó $AB > AC \Leftrightarrow HB > HC$ $AB = AC \Leftrightarrow HB = HC$

Với ba điểm A, B, C bất kì, luôn có :

$$AB + AC > BC,$$

hoặc AB + AC = BC (điều này xảy ra ⇔ A nằm giữa B và C).

Trong tam giác ABC, ba đường trung tuyến AD, BE, CF đồng quy tại điểm G và

$$\frac{GA}{DA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{FC} = \frac{2}{3}.$$

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC.

Trong tam giác ABC, ba đường phân giác đồng quy tại điểm I và điểm I cách đều ba cạnh :

$$IK = IL = IM$$

Trong tam giác ABC, ba đường trung trực đồng quy tại điểm O và điểm O cách đều ba đỉnh :

$$OA = OB = OC.$$

Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong tam giác ABC, ba đường cao AI, BK, CL đồng quy tại điểm H.

Điểm H là trực tâm của tam giác ABC.

Tam giác ABC cân tại A ⇔ Hai trong bốn đường sau trùng nhau : đường trung trực của cạnh BC, đường trung tuyến, đường cao và đường phân giác cùng xuất phát từ đỉnh A.

Nếu tam giác ABC đều thì trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh và điểm (nằm trong tam giác) cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau.

Câu hỏi ôn tập

1. Cho tam giác ABC. Hãy viết kết luận của hai bài toán sau về quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác.

	Bài toán 1	*Bài toán 2*
Giả thiết	AB > AC	$\widehat{B} < \widehat{C}$
Kết luận		

2. Từ điểm A không thuộc đường thẳng d, kẻ đường vuông góc AH, các đường xiên AB, AC đến đường thẳng d. Hãy điền dấu (>, <) vào các chỗ trống (...) dưới đây cho đúng :

a) AB ...... AH ; AC ...... AH

b) Nếu HB ...... HC thì AB ...... AC.

c) Nếu AB ...... AC thì HB ...... HC.

3. Cho tam giác DEF. Hãy viết các bất đẳng thức về quan hệ giữa các cạnh của tam giác này.

4. Hãy ghép đôi hai ý ở hai cột để được khẳng định đúng

Trong tam giác ABC

a) đường phân giác xuất phát từ đỉnh A	a') là đường thẳng vuông góc với cạnh BC tại trung điểm của nó.
b) đường trung trực ứng với cạnh BC	b') là đoạn vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng BC.
c) đường cao xuất phát từ đỉnh A	c') là đoạn thẳng nối A với trung điểm của cạnh BC.
d) đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A	d') là đoạn thẳng có hai mút là đỉnh A và giao điểm của cạnh BC với tia phân giác của góc A.

5. Cũng với yêu cầu như ở câu 4

Trong một tam giác

a) trọng tâm	a') là điểm chung của ba đường cao.
b) trực tâm	b') là điểm chung của ba đường trung tuyến.
c) điểm (nằm trong tam giác) cách đều ba cạnh	c') là điểm chung của ba đường trung trực.
d) điểm cách đều ba đỉnh	d') là điểm chung của ba đường phân giác.

6. a) Hãy nêu tính chất của trọng tâm của một tam giác ; các cách xác định trọng tâm

b) Bạn Nam nói : "Có thể vẽ được một tam giác có trọng tâm ở bên ngoài tam giác". Bạn Nam nói đúng hay sai ? Tại sao ?

7. Những tam giác nào có ít nhất một đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác, đường trung trực, đường cao ?

8. Những tam giác nào có trọng tâm đồng thời là trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm (nằm trong tam giác) cách đều ba cạnh ?

Bài tập

63. Cho tam giác ABC với AC < AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD = AB. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho CE = AC. Vẽ các đoạn thẳng AD, AE.

a) Hãy so sánh góc ADC và góc AEB.

b) Hãy so sánh các đoạn thẳng AD và AE.

64. Gọi MH là đường cao của tam giác MNP. Chứng minh rằng : Nếu MN < MP thì HN < HP và $\widehat{NMH} < \widehat{PMH}$ (yêu cầu xét hai trường hợp : khi góc N nhọn và khi góc N tù).

65. Có thể vẽ được mấy tam giác (phân biệt) với ba cạnh là ba trong năm đoạn thẳng có độ dài như sau : 1cm, 2cm, 3cm, 4cm và 5cm ?

66. **Đố :** Bốn điểm dân cư được xây dựng như hình 58. Hãy tìm vị trí đặt một nhà máy sao cho tổng các khoảng cách từ nhà máy đến bốn điểm dân cư này là nhỏ nhất.



Hình 58

67. Cho tam giác MNP với đường trung tuyến MR và trọng tâm Q.

a) Tính tỉ số các diện tích của hai tam giác MPQ và RPQ.

b) Tính tỉ số các diện tích của hai tam giác MNQ và RNQ.

c) So sánh các diện tích của hai tam giác RPQ và RNQ.

Từ các kết quả trên, hãy chứng minh các tam giác QMN, QNP, QPM có cùng diện tích.

Gợi ý : Hai tam giác ở mỗi câu a, b, c có chung đường cao.

68. Cho góc xOy. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai cạnh Ox, Oy.

a) Hãy tìm điểm M cách đều hai cạnh của góc xOy và cách đều hai điểm A, B.

b) Nếu OA = OB thì có bao nhiêu điểm M thoả mãn các điều kiện trong câu a ?

69. Cho hai đường thẳng phân biệt không song song a và b, điểm M nằm bên trong hai đường thẳng này. Qua M lần lượt vẽ đường thẳng c vuông góc với a tại P, cắt b tại Q và đường thẳng d vuông góc với b tại R, cắt a tại S. Chứng minh rằng đường thẳng qua M, vuông góc với SQ cũng đi qua giao điểm của a và b.

70. Cho A, B là hai điểm phân biệt và d là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

a) Ta kí hiệu P_A là nửa mặt phẳng bờ d có chứa điểm A (không kể đường thẳng d). Gọi N là một điểm của P_A và M là giao điểm của đường thẳng NB và d. Hãy so sánh NB với NM + MA ; từ đó suy ra NA < NB.

b) Ta kí hiệu P_B là nửa mặt phẳng bờ d có chứa điểm B (không kể d). Gọi N' là một điểm của P_B. Chứng minh rằng N'B < N'A.

c) Gọi L là một điểm sao cho LA < LB. Hỏi điểm L nằm ở đâu, trong P_A, P_B hay trên d ?

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

A. Phần đại số

1. Thực hiện các phép tính :

a) $9,6 \,.\, 2\frac{1}{2} - \left(2 \,.\, 125 - 1\frac{5}{12}\right) : \frac{1}{4}$.

b) $\frac{5}{18} - 1,456 : \frac{7}{25} + 4,5 \cdot \frac{4}{5}$;

c) $\left(\frac{1}{2} + 0,8 - 1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(2,3 + 4\frac{7}{25} - 1,28\right)$;

d) $(-5) \,.\, 12 : \left[\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} : (-2)\right] + 1\frac{1}{3}$;

2. Với giá trị nào của x thì ta có :

a) $|x| + x = 0$; b) $x + |x| = 2x$.

3. Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($a \neq c$, $b \neq \pm d$) hãy rút ra tỉ lệ thức : $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$.

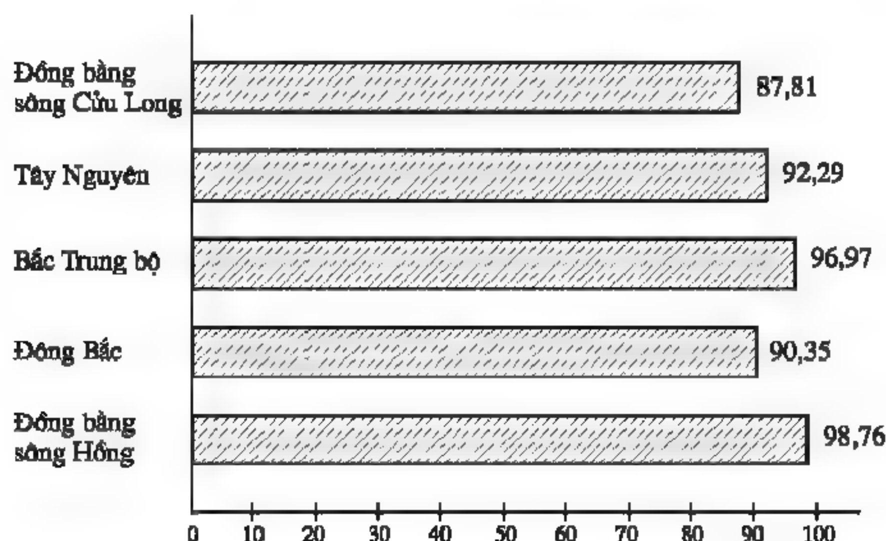
4. Ba đơn vị kinh doanh đầu tư vốn tỉ lệ với 2 ; 5 và 7. Hỏi mỗi đơn vị được chia bao nhiêu lãi nếu số tiền lãi là 560 triệu đồng và tiền lãi được chia tỉ lệ thuận với vốn đầu tư ?

5. Cho hàm số : $y = -2x + \frac{1}{3}$. Các điểm sau đây có thuộc đồ thị hàm số không ?

$$A\left(0\ ;\ \frac{1}{3}\right)\ ;\qquad B\left(\frac{1}{2}\ ;\ -2\right)\ ;\qquad C\left(\frac{1}{6}\ ;\ 0\right).$$

6. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = ax$ đi qua điểm $M(-2\ ;\ -3)$. Hãy tìm a.

7. Biểu đồ dưới đây biểu diễn tỉ lệ (%) trẻ em từ 6 đến 10 tuổi đang học Tiểu học ở một số vùng của nước ta :



Hãy cho biết :

a) Tỉ lệ (%) trẻ em từ 6 tuổi đến 10 tuổi của vùng Tây Nguyên, vùng đồng bằng sông Cửu Long đi học Tiểu học.

b) Vùng nào có tỉ lệ (%) trẻ em từ 6 tuổi đến 10 tuổi đi học Tiểu học cao nhất, thấp nhất.

8. Để tìm hiểu về sản lượng vụ mùa của một xã, người ta chọn ra 120 thửa để gặt thử và ghi lại sản lượng của từng thửa (tính theo tạ/ha). Kết quả được tạm sắp xếp như sau :

Có 10 thửa đạt năng suất 31 tạ/ha ; Có 20 thửa đạt năng suất 34 tạ/ha

Có 30 thửa đạt năng suất 35 tạ/ha ; Có 15 thửa đạt năng suất 36 tạ/ha

Có 10 thửa đạt năng suất 38 tạ/ha ; Có 10 thửa đạt năng suất 40 tạ/ha

Có 5 thửa đạt năng suất 42 tạ/ha ; Có 20 thửa đạt năng suất 44 tạ/ha.

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Hãy lập bảng "tần số".

b) Biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng.

c) Tìm mốt của dấu hiệu.

d) Tính số trung bình cộng của dấu hiệu.

9. Tính giá trị của biểu thức $2,7c^2 - 3,5c$ lần lượt tại $c = 0,7$; $\frac{2}{3}$ và $1\frac{1}{6}$.

10. Cho các đa thức :

$$A = x^2 - 2x - y^2 + 3y - 1$$

$$B = -2x^2 + 3y^2 - 5x + y + 3$$

$$C = 3x^2 - 2xy + 7y^2 - 3x - 5y - 6.$$

Tính :

a) $A + B - C$; b) $A - B + C$; c) $-A + B + C$.

11. Tìm x, biết :

a) $(2x - 3) - (x - 5) = (x + 2) - (x - 1)$.

b) $2(x - 1) - 5(x + 2) = -10$.

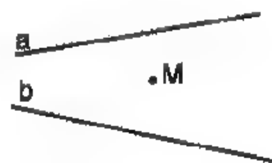
12. Tìm hệ số a của đa thức $P(x) = ax^2 + 5x - 3$, biết rằng đa thức này có một nghiệm là $\frac{1}{2}$.

13. a) Tìm nghiệm của đa thức : $P(x) = 3 - 2x$;

b) Hỏi đa thức $Q(x) = x^2 + 2$ có nghiệm hay không ? Vì sao ?

B. Phần hình học

1. Cho điểm M và hai đường thẳng a, b không song song với nhau (h. 59).



Hình 59

a) Vẽ đường thẳng MH vuông góc với a (H ∈ a), MK vuông góc với b (K ∈ b). Nêu cách vẽ.

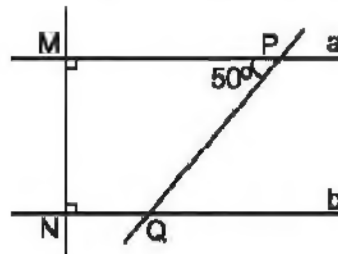
b) Qua M vẽ đường thẳng xx' song song với a và đường thẳng yy' song song với b. Nêu cách vẽ.

c) Viết tên các cặp góc bằng nhau, bù nhau.

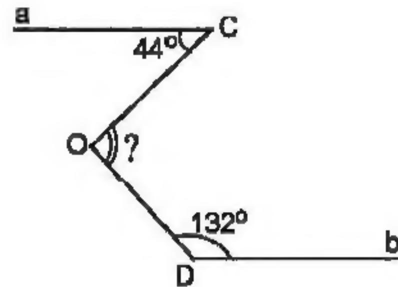
2. Xem hình 60.

a) Giải thích vì sao a // b.

b) Tính số đo góc NQP.



Hình 60



Hình 61

3. Hình 61 cho biết a // b, $\widehat{C} = 44^\circ$, $\widehat{D} = 132^\circ$.

Tính số đo góc COD.

(*Hướng dẫn :* Vẽ đường thẳng song song với đường thẳng a và đi qua điểm O).

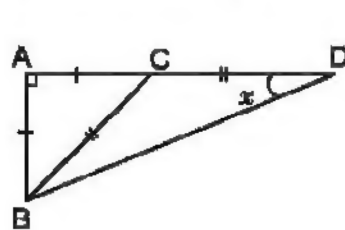
4. Cho góc vuông xOy, điểm A thuộc tia Ox, điểm B thuộc tia Oy. Đường trung trực của đoạn thẳng OA cắt Ox ở D, đường trung trực của đoạn thẳng OB cắt Oy ở E. Gọi C là giao điểm của hai đường trung trực đó. Chứng minh rằng :

a) CE = OD ; b) CE ⊥ CD ;

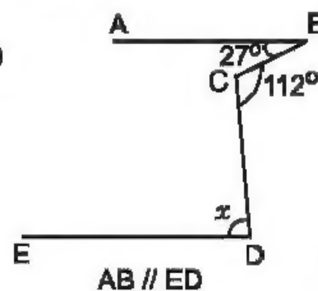
c) CA = CB ; d) CA // DE ;

e) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

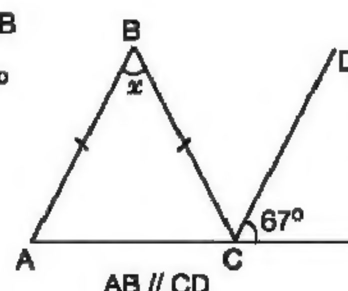
5. Tính số đo x trong mỗi hình 62, 63, 64 :



Hình 62



Hình 63



Hình 64

6. Cho tam giác cân ADC (AD = DC) có $\widehat{ACD} = 31^{\circ}$. Trên cạnh AC lấy một điểm B sao cho $\widehat{ABD} = 88^{\circ}$. Từ C kẻ một tia song song với BD cắt tia AD ở E.

a) Hãy tính các góc DCE và DEC.

b) Trong tam giác CDE, cạnh nào lớn nhất ? Tại sao ?

7. Từ một điểm M trên tia phân giác của góc nhọn xOy, kẻ đường vuông góc với cạnh Ox (tại A), đường thẳng này cắt cạnh Oy tại B.

a) Hãy so sánh hai đoạn thẳng OA và MA.

b) Hãy so sánh hai đoạn thẳng OB và OM.

8. Cho tam giác ABC vuông tại A ; đường phân giác BE. Kẻ EH vuông góc với BC ($H \in BC$). Gọi K là giao điểm của AB và HE. Chứng minh rằng :

a) $\Delta ABE = \Delta HBE$.

b) BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

c) EK = EC.

d) AE < EC.

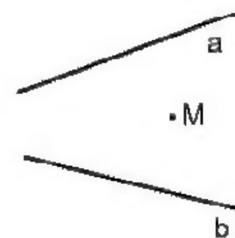
9. Chứng minh rằng : Nếu tam giác ABC có đường trung tuyến xuất phát từ A bằng một nửa cạnh BC thì tam giác đó vuông tại A.

Ứng dụng : Một tờ giấy bị rách ở mép (h. 65). Hãy dùng thước và compa dựng đường vuông góc với cạnh AB tại A.



Hình 65

10. Cho hình 66. Không vẽ giao điểm của a, b, hãy nêu cách vẽ đường thẳng đi qua giao điểm này và điểm M.



Hình 66

11. **Đố** : Cho tam giác ABC. Em hãy tô màu để xác định phần bên trong của tam giác gồm các điểm M sao cho :

MA < MB < MC.

(*Hướng dẫn :* Trước tiên tô màu để xác định các điểm M ở trong tam giác mà MA < MB ; lần thứ hai là MB < MC. Phần trong tam giác được tô màu hai lần là phần phải tìm).

MỤC LỤC

Trang

PHẦN ĐẠI SỐ

PHẦN HÌNH HỌC





SÁCH GIÁO KHOA LỚP 7

1. Ngữ văn 7 (tập một, tập hai)
2. Lịch sử 7
3. Địa lí 7
4. Giáo dục công dân 7
5. Âm nhạc và Mĩ thuật 7
6. Toán 7 (tập một, tập hai)
7. Vật lí 7
8. Sinh học 7
9. Công nghệ 7
10. Tiếng nước ngoài :
    - Tiếng Anh 7
    - Tiếng Nga 7
    - Tiếng Pháp 7
    - Tiếng Trung Quốc 7
    - Tiếng Nhật 7

mã vạch



Tem chống giả

Giá: ....